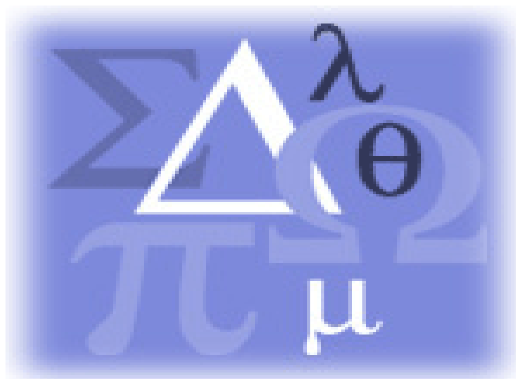
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HCM
KHOA TOÁN

LÊ VĂN TIẾN



PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC MÔN TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

(Các tình huống dạy học điển hình)

TP.HCM – 2005

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách này không phải là một tài liệu đầy đủ về lí luận dạy học môn toán (hay Phương pháp dạy học môn toán, như ta vẫn thường gọi). Nó không đề cập hết các nội dung về Phương pháp dạy học môn toán với tư cách là một ngành khoa học hay với tư cách là một bộ môn trong các trường sư phạm. Một giáo trình đầy đủ như vậy đang được tác giả cố gắng hoàn thiện trong một vài năm tới.

Tài liệu này chỉ trình bày hai nội dung chủ yếu nhất của chương trình phương pháp dạy học môn toán – phần đại cương, mà tác giả đã giảng dạy cho sinh viên năm thứ ba Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh từ nhiều năm nay. Đó là một số vấn đề cơ bản liên quan đến phương pháp dạy học học theo định hướng tích cực hoá hoạt động của học sinh, và đặc biệt là các tình huống điển hình mà ta thường gặp trong thực tế dạy học toán ở trường phổ thông.

Việc xuất bản tài liệu này nhắm tới các mục đích chủ yếu sau đây:

– Cập nhật một số nội dung kiến thức mới, phù hợp với xu thế phát triển của khoa học giáo dục nói chung và định hướng đổi mới phương pháp ở trường phổ thông nói riêng;

– Trình bày chi tiết hơn, sâu hơn một số nội dung liên quan tới các tình huống điển hình trong dạy học môn toán ở trường THPT với nhiều ví dụ minh hoạ rút ra từ thực tế dạy học;

– Tạo thuận lợi cho việc đổi mới cách dạy và cách học ở trường Đại học Sư phạm, hạn chế tối đa việc ghi chép của sinh viên. Từ đó nó cho phép dành nhiều thời gian hơn cho hoạt động thực hành như soạn bài và tập giảng, xem và trao đổi về giờ giảng của giáo viên phổ thông qua băng đĩa, dự giờ của giáo viên ở trường Trung học phổ thông ngay từ đầu năm thứ ba và chính trong quá trình học tập bộ môn Phương pháp dạy học. Nó cũng tạo thuận lợi cho việc tổ chức học tập dưới hình thức thảo luận, xêmina, làm bài tập theo nhóm, ...

Tác giả hy vọng việc đào tạo đan xen giữa lí thuyết và thực hành như vậy sẽ cho phép sinh viên nắm vững hơn kiến thức và rèn luyện tốt hơn kĩ năng sư phạm.

Hy vọng rằng đây cũng là một tài liệu tham khảo có ích cho giáo viên phổ thông trong xu thế đổi mới phương pháp dạy học hiện nay.

Tác giả rất biết ơn và mong muốn nhận được những ý kiến đóng góp của bạn đọc để hoàn thiện dần các nội dung được đề cập trong tài liệu.

Tác giả
Lê Văn Tiến

Phần 1

PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC MÔN TOÁN

Những vấn đề cơ bản trong lí luận dạy học tổng quát[1] đã được đề cập trong học phần Giáo dục học đại cương dành cho sinh viên năm thứ hai Đại học Sư phạm. Vấn đề là vận dụng chúng vào dạy học môn toán như thế nào. Để trả lời câu hỏi này, trước hết phải làm rõ đặc thù của dạy học môn toán và sự tương thích với lí luận dạy học nói chung. Điều này sẽ được đề cập trong một giáo trình đầy đủ về phương pháp dạy học môn toán mà tác giả đang cố gắng hoàn thiện trong vài năm tới. Trong phạm vi tài liệu này, sau khi sơ lược vài khái niệm cơ bản, ta sẽ tập trung vào một số vấn đề về phương pháp dạy học toán theo định hướng tích cực hoá hoạt động của học sinh. Sau đó, ta sẽ quan tâm đặc biệt hơn về dạy học đặt và giải quyết vấn đề.

1. Khái niệm phương pháp dạy học

Thuật ngữ **phương pháp**, theo tiếng Hy Lạp "Méthodos", có nghĩa là con đường, cách thức thực hiện một kiểu nhiệm vụ nào đó, nhằm đạt tới kết quả ứng với mục đích đã vạch ra.

Dạy học là khái niệm chỉ hoạt động chung của người dạy và người học nhằm mục đích làm cho người học lĩnh hội được các kiến thức và kĩ năng, phát triển năng lực trí tuệ và phẩm chất đạo đức, thẩm mĩ, … Hoạt động dạy học bao hàm trong nó hoạt động dạy và hoạt động học. Tuy nhiên, hai hoạt động này không diễn ra một cách song song tách rời mà xen lẫn vào nhau, tương tác lẫn nhau. Như vậy, có thể xem dạy học như là một kiểu nhiệm vụ mà giáo viên và học sinh cùng có trách nhiệm hợp tác thực hiện.

Phương pháp dạy học là cách thức thực hiện kiểu nhiệm vụ "Dạy học" của cặp người dạy - người học nhằm đạt được các mục đích dạy học xác định.

2. Phân loại tổng thể các phương pháp dạy học

Hiện nay có nhiều hệ thống phân loại khác nhau về các phương pháp dạy học, nhưng chưa có một hệ thống phân loại nào thực sự hoàn chỉnh và tối ưu (vả lại xây dựng một hệ thống phân loại như vậy dường như là không thể và không có nhiều ý nghĩa về mặt thực tiễn). Tuy nhiên, dù có những khiếm khuyết của nó, nhưng mỗi hệ thống phân loại lại cho ta thấy rõ hơn một khía cạnh nào đó về các phương pháp dạy học.

Nếu dựa vào tiêu chí phân loại là vai trò của giáo viên, vai trò của học sinh và đặc trưng của tri thức cần truyền thụ, ta có một cách phân chia tổng thể các phương pháp dạy học theo ba nhóm: Phương pháp giáo điều, phương pháp truyền thống và phương pháp tích cực.

2.1. Phương pháp giáo điều

– Giáo viên: là người có quyền lực tuyệt đối, *thông báo, áp đặt* kiến thức[2] một cách trực

---

[1] Quy trình dạy học, phương pháp dạy học, nguyên tắc dạy học, hình thức tổ chức dạy học, …

[2] Thực ra, có một sự khác biệt cơ bản giữa Tri thức và Kiến thức (tham khảo lí thuyết chuyển hóa sư phạm (transposition didactique) của Y. Chevallard, 1991). Tuy nhiên, giáo trình này không có sự phân biệt rạch ròi hai khái niệm.

tiếp cho học sinh (theo kiểu giảng đạo). Giáo viên chi phối toàn bộ các mối quan hệ giáo dục.

– Học sinh: có vai trò lu mờ, thụ động nghe, học thuộc và ghi nhớ những điều mà giáo viên thông báo mà không cần hiểu "nghĩa" của kiến thức tiếp thu được.
– Kiến thức : được cho trực tiếp bởi giáo viên dưới dạng có sẵn đã "phi hoàn cảnh hoá", "phi thời gian hoá" và "phi cá nhân hoá". Nó chỉ mang "nghĩa hình thức".
– Giáo viên có quyền lực tuyệt đối trong việc đánh giá học sinh.

2.2. Phương pháp truyền thống

a) Đặc trưng tổng quát

• Giáo viên : vẫn giữ vị trí trung tâm của hệ thống dạy học, có trách nhiệm *truyền đạt* kiến thức cho học sinh, cho một vài ví dụ minh họa hay một vài bài toán mẫu, sau đó yêu cầu học sinh áp dụng kiến thức vào việc giải quyết các tình huống tương tự với tình huống mà giáo viên đã trình bày và giải quyết.

Trong kiểu dạy học này, giáo viên quan tâm chủ yếu tới trình bày của mình sao cho chính xác, sáng sủa, rõ ràng, logic và dễ hiểu, mà ít quan tâm đến cái mà học sinh cần, cái mà học sinh nghĩ và hoạt động của chính người học. Để cho học sinh có thể hiểu, ghi nhớ và áp dụng tốt kiến thức đã trình bày, giáo viên thường chú ý đảm bảo một số nguyên tắc và phương pháp sư phạm tổng quát, chẳng hạn : đảm bảo tính hệ thống, tính trực quan, tính vừa sức, … Từ đó, tăng cường sử dụng các thiết bị dạy học[3]; coi trọng việc luyện tập và ôn tập ; chú ý đặc biệt đến kĩ thuật đặt câu hỏi, …

• Học sinh: học theo kiểu bắt chước và thường thụ động tiếp thu. Họ cố gắng ghi nhớ và áp dụng đúng "mẫu" mà giáo viên đã trình bày. Hoạt động đích thực của học sinh (nếu có) chỉ diễn ra khi trả lời một số câu hỏi, làm bài tập áp dụng hay thực hiện một chứng minh định lí, … theo yêu cầu của giáo viên.

• Kiến thức: vẫn được cho trực tiếp bởi giáo viên và thường là dưới dạng có sẵn đã "phi hoàn cảnh hoá", "phi thời gian hoá", "phi cá nhân hoá" và mang "nghĩa hình thức".

• Giáo viên có vai trò gần như tuyệt đối trong việc đánh giá học sinh.

b) Các phương pháp dạy học truyền thống

Hiện nay, ngay trong bản thân các phương pháp dạy học truyền thống, cũng có nhiều hệ thống phân loại khác nhau, nhưng chúng vẫn chưa hoàn chỉnh và chưa có được sự thống nhất trong cộng đồng các nhà sư phạm. Dưới đây, chỉ giới thiệu tóm tắt một trong các hệ thống phân loại đó.

– Nhóm các phương pháp dùng lời : Thuyết trình; Đàm thoại; Làm việc với sách ; …
– Nhóm các phương pháp trực quan: Biểu diễn vật thật, vật tượng hình hay tượng trưng; Xem băng ghi hình, phim đèn chiếu, …
– Nhóm các phương pháp thực hành: Luyện tập ; Thực nghiệm, quan sát và dự đoán. …

Trong thực tế dạy học, các phương pháp thuộc ba nhóm trên thường được sử dụng xen kẽ nhau, lồng vào nhau.

[3] Sơ đồ, biểu đồ, vật thật, phim ảnh, phần mềm MS Powerpoint, …

Ở đây, ta không đi sâu nghiên cứu các phương pháp dạy học truyền thống, vì chúng đã được đề cập khá chi tiết trong bộ môn Giáo dục học.

2.3. Sư phạm tích cực và phương pháp dạy học tích cực

Ngay từ đầu thế kỉ 20 các nhà tâm lí hay sư phạm như Dewey, Parkhust, Dalton ở Mỹ, Freinner ở Pháp, Claparède ở Thuy Sĩ, Montessori ở Ý, Decroly ở Bỉ đã quan niệm rằng : Cần phải đặt học sinh vào vị trí trung tâm của hoạt động dạy học, phải xuất phát từ lợi ích của học sinh và những điều mà họ quan tâm. Đó chính là thời điểm mà người ta bắt đầu nói về "sư phạm tích cực". Tuy nhiên, gần như suốt thế kỉ 20, sư phạm này chỉ sống một cách lay lắt bên cạnh sư phạm truyền thống.

Có nhiều xu hướng sư phạm tích cực khác nhau như : Sư phạm tương tác, Sư phạm khám phá, Sư phạm dự án, … Những xu hướng này có những nét tương đồng nhưng cũng có nhiều khác biệt cơ bản. Trong phạm vi tài liệu này, ta không đi sâu nghiên cứu chúng.

Ở đây, thuật ngữ "Phương pháp dạy học tích cực" (hay gọi tắt là Phương pháp tích cực) được hiểu là các phương pháp dạy học thể hiện tư tưởng của các xu hướng sư phạm tích cực[4], mà sau đây ta sẽ nêu lên một số đặc trưng cơ bản của nó.

Đặc trưng của phương pháp tích cực :

– Giáo viên tự nguyện rời bỏ vị trí trung tâm. Họ chỉ còn là người đạo diễn, trọng tài, cố vấn, tổ chức cho học sinh tự mình kiến tạo kiến thức mới.

– Học sinh trở thành chủ thể, thành trung tâm được định hướng để *tự mình xây dựng kiến thức*, chứ không phải được đặt trước những kiến thức có sẵn của sách giáo khoa, hay bài giảng áp đặt của giáo viên.

– Nói chung, kiến thức được khám phá bởi người học có thể còn phiến diện, khiếm khuyết, chưa đầy đủ, chưa hoàn chỉnh như tri thức ta muốn truyền thụ. Chính lớp học và giáo viên sẽ giúp họ hoàn chỉnh kiến thức này.

– Kiến thức không còn được truyền thụ trực tiếp bởi giáo viên mà *do học sinh khám phá* ra qua quá trình hoạt động giải quyết các vấn đề (có thể có sự giúp đỡ của giáo viên). Trong trường hợp này, kiến thức mới nảy sinh như là *phương tiện hay kết quả* của hoạt động giải quyết vấn đề của học sinh.

– Kết hợp đánh giá của thầy và tự đánh giá của trò.

– Học sinh được tạo điều kiện tham gia vào việc đánh giá không chỉ sản phẩm cuối cùng (như lời giải bài toán, …), mà cả quá trình mò mẫm, tìm kiếm cách giải quyết vấn đề, đánh giá cách tổ chức và giải quyết vấn đề, tinh thần và thái độ làm việc, khả năng sáng tạo, … của chính mình hay của bạn. Từ đó, phát triển kĩ năng tự đánh giá để tự điều chỉnh cách học của mình.

2.4. Phương pháp tích cực và dạy học theo định hướng tích cực hoá hoạt động của học sinh

---

[4] Phân biệt giữa xu hướng sư phạm và phương pháp chỉ là tương đối, vì thực ra cùng là khái niệm phương pháp nhưng có thể xét ở ba cấp độ khác nhau :
- Ở cấp độ quan điểm, tư tưởng hay cách tiếp cận tổng quát, thì ta nói đến xu hướng sư phạm (chẳng hạn, sư phạm tương tác, sư phạm khám phá,...).
- Ở cấp độ quy trình, hay các thao tác và cách thức thực hiện cụ thể thì ta thường dùng thuật ngữ "Phương pháp".

Hiện nay vẫn chưa có sự nhất trí hoàn toàn về việc sử dụng thuật ngữ "Phương pháp tích cực". Có thể tính đến ba quan niệm nổi trội nhất sau đây:

• **Quan niệm thứ nhất**: Dùng thuật ngữ "Phương pháp tích cực" để chỉ tất cả những phương pháp dạy học cho phép phát huy được tính tích cực học tập của học sinh.

Quan niệm này dựa trên khái niệm "tính tích cực học tập của học sinh" mà theo G. I. Sukina (1977) những dấu hiệu cơ bản của nó là: Học sinh khao khát học tập, hay nêu thắc mắc, chủ động vận dụng linh hoạt kiến thức đã học, tập trung chú ý và kiên trì giải quyết vấn đề, …

Sukina[5] cũng đã phân chia tính tích cực ra làm ba cấp độ:

1. *Tính tích cực bắt chước, tái hiện*: Xuất hiện do tác động kích thích bên ngoài (yêu cầu của giáo viên), trong trường hợp này, người học thao tác trên các đối tượng, bắt chước theo mẫu hoặc mô hình của giáo viên, nhằm chuyển đối tượng từ ngoài vào trong theo cơ chế "Hoạt động bên ngoài và bên trong có cùng cấu trúc". Nhờ đó, kinh nghiệm hoạt động được tích luỹ thông qua kinh nghiệm của người khác.

2. *Tính tích cực tìm tòi*: độc lập giải quyết vấn đề đặt ra, tìm kiếm các phương thức hành động trên cơ sở có tính tự giác, có sự tham gia của động cơ, nhu cầu, hứng thú và ý chí của học sinh.

3. *Tính tích cực sáng tạo*: thể hiện khi chủ thể nhận thức tự tìm tòi kiến thức mới, tự tìm ra phương thức hành động riêng và trở thành phẩm chất bền vững của cá nhân. Đây là mức độ biểu hiện cao nhất của tính tích cực.

Như vậy, theo quan niệm này, ngay cả trong tình huống học tập bằng "bắt chước" vẫn cần thiết và có thể phát huy được tính tích cực học tập của học sinh.

• **Quan niệm thứ hai** : Tư tưởng tương tự như quan niệm thứ nhất, nhưng tránh dùng thuật ngữ "Phương pháp tích cực" hay "Phương pháp dạy học tích cực", mà sử dụng một cách nói khá khái quát như "Phương pháp dạy học theo định hướng tích cực hoá hoạt động của học sinh" hay theo định hướng "hoạt động hoá người học", …

• **Quan niệm thứ ba**: Dùng thuật ngữ "Phương pháp tích cực" theo nghĩa chặt, để chỉ những phương pháp dạy học có những đặc trưng chủ yếu mà chúng tôi đã nêu ở trên. Như vậy, theo quan niệm này, phương pháp tích cực và phương pháp dạy học theo định hướng tích cực hoá hoạt động của học sinh không đồng nhất. Nói cách khác, có thể có những phương pháp dạy học cho phép phát huy được tính tích cực học tập của học sinh, nhưng không phải là phương pháp tích cực. Tài liệu này được biên soạn dựa trên quan niệm thứ ba.

Theo quan niệm này, một trong các điều kiện cần của phương pháp tích cực xuất phát từ đặc trưng của việc xây dựng kiến thức: kiến thức phải được kiến tạo bởi học sinh qua quá trình hoạt động giải quyết các vấn đề của chính họ (có thể có sự giúp đỡ ít nhiều của giáo viên).

Để hiểu rõ hơn quan niệm này, ta xét tiến trình dạy học một định lí toán học (kiến thức mới cần lĩnh hội) sau đây:

---

[5] Trích dẫn theo Nguyễn Lan Phương (2000).

- Bước 1: Trình bày định lí (giáo viên phát biểu định lí hoặc học sinh đọc định lí có sẵn trong sách giáo khoa).

- Bước 2: Học sinh chứng minh định lí (có thể có sự giúp đỡ của giáo viên nhờ vàp phương pháp vấn đáp gợi mở).

- Bước 3: Học sinh làm bài tập củng cố vận dụng định lí (có thể có sự giúp đỡ của giáo viên nhờ vào phương pháp vấn đáp gợi mở).

Các phương pháp dạy học được sử dụng bởi giáo viên ứng với tiến trình này không được xem là phương pháp dạy học tích cực, vì kiến thức mới cần xây dựng là nội dung định lí đã được thông báo trực tiếp mà không phải do học sinh kiến tạo nên. Tuy nhiên, chúng có thể cho phép phát huy tính tích cực học tập của học sinh trong các pha chứng minh định lí hay giải bài tập áp dụng.

Chú ý rằng, phương pháp tích cực hiểu theo nghĩa chặt như vậy cũng **có tính tương đối**. Nếu quan niệm rằng khi học sinh tự mình chứng minh được định lí (thậm chí có thể chứng minh bằng nhiều cách khác nhau) thì học sinh đã tự khám phá ra một dạng tri thức mới khác, chẳng hạn tri thức phương pháp. Như vậy, phương pháp dạy học tương ứng phải là phương pháp tích cực ! Quả thực, trong nhiều trường hợp việc khám phá các cách chứng minh khác một kết quả đã biết cũng đòi hỏi tính tích cực, chủ động và sáng tạo.

Như vậy, để không rơi vào tình huống lưỡng lự này, cần phải xác định rõ những kiến thức mới, trọng tâm cần xây dựng trong bài học. Đó phải là những kiến thức hình thành nên phần chủ yếu của mục tiêu bài học, mà giáo viên phải làm rõ trong phần mục tiêu (hay mục đích yêu cầu) của giáo án.

Hơn nữa, ở đây, khái niệm *Kiến thức mới* được hiểu theo nghĩa : đó có thể là kiến thức mà học sinh chưa từng có (một định nghĩa khái niệm, một định lí, một phương pháp giải toán,…), cũng có thể là những kiến thức cũ nhưng được điều chỉnh, tổ chức lại hoặc lấy một *nghĩa* mới.

Chẳng hạn, cho đến lớp 12 học sinh đã biết nhiều phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng. Nếu bây giờ họ tự thực hiện được một sự tổng hợp các phương pháp, phân tích, so sánh và xếp loại chúng, nhận ra được điều kiện áp dụng phương pháp và tính hiệu quả của chúng (trong điều kiện nào thì áp dụng phương pháp này, mà không phải phương pháp kia,…), … thì trong trường hợp này, ta vẫn quan niệm học sinh đã tự mình khám phá ra kiến thức mới. Ở đây, cái mới không nằm ở bản thân từng phương pháp mà học sinh đã biết, mà trong tổng thể các mối quan hệ giữa chúng.

2.5. Phát huy tính tích cực học tập của học sinh ngay chính trong phương pháp dạy học truyền thống

Trước hết cần tránh chủ nghĩa cực đoan cho rằng nên tổ chức cho học sinh tự kiến tạo (khám phá lại) tất cả những kiến thức môn học mà xã hội mong muốn họ lĩnh hội. Điều này là không thể, mà trước hết là do không đủ quỹ thời gian làm việc đó. I.Ia.Lécne (1977) cũng nhấn mạnh :

"*Do bản chất xã hội của nó, dạy học là sự truyền thụ kinh nghiệm do xã hội tích luỹ cho thế hệ trẻ. Cho nên một tổ chức dạy học trong đó học sinh phải khám phá lại tất cả những điều mà loài người biết được trước đây và được quy định trong chương trình học, là một điều ít nhất cũng là kì quái*".

Như vậy, không thể loại bỏ hoàn toàn các phương pháp dạy học truyền thống, mà cần có một sự vận dụng phối hợp các loại hình phương pháp.

Hơn nữa, theo quan điểm thứ ba nêu trên, ngay cả khi áp dụng phương pháp dạy học truyền thống, chứ không phải phương pháp tích cực, ta vẫn có thể phát huy được tính tích cực học tập của học sinh. Nói cách khác, ta có thể khai thác yếu tố tích cực ngay chính trong phương pháp dạy học truyền thống.

Như vậy, tính tích cực của học sinh được phát huy không phải trong pha khám phá kiến thức mới mà có thể trong các pha như : Hợp thức hoá kiến thức mới (chứng minh một định lí, chẳng hạn); Giải các bài toán có vận dụng kiến thức mới vừa lĩnh hội; Ôn tập; …

Tuy nhiên, cũng cần lưu ý rằng, nếu kiến thức cần truyền thụ được chiếm lĩnh bởi học sinh theo cách thức lĩnh hội các tiêu chuẩn hay hình mẫu có sẵn, thì tính tính cực của người học (nếu có thể hiện) cũng rất thấp.

3. Dạy học đặt và giải quyết vấn đề

Trước khi đi vào nội dung của dạy học đặt và giải quyết vấn đề, ta đề cập hai lưu ý sau đây:

• Về tên gọi: Đã có nhiều cách gọi khác nhau như Dạy học nêu vấn đề, Dạy học có tính vấn đề, Dạy học giải quyết vấn đề, Dạy học nêu và giải quyết vấn đề, Dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề, Dạy học đặt và giải quyết vấn đề.

Mỗi cách gọi đều có những lí lẽ riêng của nó và hàm chứa trong đó logic của hình thức dạy học tương ứng, cũng như điểm mấu chốt cần nhấn mạnh. Nhưng ta không đi sâu phân tích vấn đề này.

Ở đây, ta sẽ dùng thuật ngữ Dạy học đặt và giải quyết vấn đề với các lí do sau đây:

– Hiện nay, thuật ngữ này thường hay được dùng;

– Cụm từ "đặt và giải quyết vấn đề" thể hiện một quan điểm sư phạm hiện đại sau đây về dạy học toán ở trường phổ thông đang được vận dụng trong nhiều nước, chẳng hạn ở Pháp:

"*Học toán là học phát hiện, học trình bày và giải quyết các bài toán, là học xem xét lại các bài toán dưới ánh sáng của các công cụ lí thuyết nảy sinh từ quá trình giải quyết các vấn đề*." (Lê Văn Tiến, 2001).

Thuật ngữ *Đặt vấn đề* được dùng ở trên có thể bao hàm được cả hai nghĩa: phát hiện vấn đề và trình bày vấn đề.

Dạy cho học sinh tự phát hiện vấn đề, sau đó trình bày và giải quyết vấn đề sẽ cho phép phát huy cao độ tính tích cực và tư duy sáng tạo của học sinh. Tuy nhiên, việc thực hiện không mấy dễ dàng trong tình hình dạy học hiện nay. Vì thế có thể tính đến hai cấp độ thấp hơn là giáo viên dùng vấn đáp gợi mở để giúp học sinh thực hiện điều đó, hoặc chính giáo viên sẽ trình bày quá trình phát hiện vấn đề.

• Dạy học đặt và giải quyết vấn đề là một xu hướng sư phạm hay là một phương pháp dạy học?

Câu trả lời phụ thuộc vào góc độ mà ta xem xét.

– Từ góc độ quan điểm và tư tưởng tổng quát của cách tiếp cận thì đó là một xu hướng sư phạm, đặt cơ sở lí luận trên triết học, tâm lí học, giáo dục học và cả sinh học. Từ quan điểm giáo dục học, tư tưởng tổng quát là: "*Học sinh tham gia một cách có hệ thống vào quá trình giải quyết các vấn đề và các bài toán có vấn đề được xây dựng theo nội dung tài liệu học trong chương trình.*" (I. Ia. Lecne, Phạm Tất Đắc dịch 1977).

– Từ góc độ quy trình hay thao tác áp dụng trong các tình huống dạy học cụ thể, thì đó là phương pháp dạy học.

Bây giờ, ta sẽ bàn đến một số nội dung cơ bản của dạy học đặt và giải quyết vấn đề.

3.1. Những khái niệm cơ bản

3.1.1. Vấn đề

Trong phạm vi của giáo trình này, thuật ngữ **Bài toán** được hiểu là "*tất cả những câu hỏi cần giải đáp về một kết quả chưa biết cần tìm bắt đầu từ những một số dữ kiện, hoặc về phương pháp cần khám phá, mà theo phương pháp này sẽ đạt được kết quả đã biết* " (Từ điển « Petit Robert »)[6].

Xét bài toán T và một chủ thể X *có ý thức về T và tiếp nhận T để giải quyết*. Khi đó có hai khả năng xảy ra:

– Chủ thể X có thể giải quyết được bài toán T chỉ nhờ vào việc *áp dụng đơn thuần* hệ thống kiến thức đã có của mình mà không có khó khăn gì.

– X không thể giải quyết được T nếu chỉ dựa vào hệ thống kiến thức đã có, hoặc chỉ giải quyết được T sau một quá trình tích cực suy nghĩ để đồng hoá đối tượng nhận thức vào mô hình kiến thức cũ của mình, hoặc để điều chỉnh lại kiến thức hay phương thức hành động cũ (nghĩa là kiến tạo kiến thức mới).

Nói cách khác bài toán T đặt ra trước chủ thể X những khó khăn nhận thức, những mâu thuẫn giữa cái đã biết và cái chưa biết, được chủ thể ý thức một cách rõ ràng hay mơ hồ, nhưng chưa có một phương pháp có tính thuật toán nào để giải quyết. Khi đó ta nói, bài toán T là một ***vấn đề***[7] đối với chủ thể X.

Cần nhấn mạnh rằng, để bài toán T là một vấn đề đối với chủ thể X, thì trước hết X phải *có ý thức về T và tiếp nhận T để giải quyết* (tự nguyện hay bắt buộc).

Như vậy, khái niệm vấn đề phụ thuộc vào chủ thể X và vào thời điểm t xác định. Một bài toán T có thể là một vấn đề với chủ thể X, nhưng lại không là vấn đề với chủ thể Y. Cùng một chủ thể X, T là vấn đề đối với X ở thời điểm này, nhưng lại không phải là vấn đề đối với X ở thời điểm khác.

Một vài ví dụ:

– Đối với một học sinh vừa học xong hằng đẳng thức $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, thì bài toán « Khai triển $(m + 3)^2$ » không phải là một vấn đề vì để giải, chỉ cần áp dụng mô hình và cách thức hành động đã có được từ việc học hằng đẳng thức trên. Nhưng, « Khai triển biểu

[6] Để hiểu rõ hơn khái niệm bài toán, tham khảo mục D "Dạy học giải các bài toán" của phần 2.

[7] Cách hiểu này phần nào cũng phù hợp với thuật ngữ «Vấn đề» theo nghĩa đời thường : "Vấn đề" được hiểu một cách đơn giản là những vướng mắc, khó khăn trong cuộc sống mà ta đang đối mặt và cần giải quyết.

thức $(a + b + c)^2$ » lại là một vấn đề với học sinh này. Việc giải thành công bài toán này đòi hỏi, học sinh biết biến đổi (đồng hoá) đối tượng mới $(a+b+c)^2$ vào mô hình cũ, chẳng hạn $(a + b + c)^2 = [a + (b + c)]^2$ và áp dụng hằng đẳng thức đã biết cho hai số a và (b+c).

Sau khi giải quyết xong bài toán, học sinh sẽ lĩnh hội được một kiến thức mới, đó là hằng đẳng thức $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ và các phương thức hành động mới đặt cơ sở trên kiến thức này. Chẳng hạn, phương thức hành động này cho phép khai triển trực tiếp bình phương của tổng dạng $(a + b + c)^2$, mà không cần quay về phương thức hành động cũ.

– Giả thuyết nổi tiếng của Goldbach (1690 – 1764): «Tất cả các số tự nhiên chẵn khác 2 đều phân tích được thành tổng của hai số nguyên tố lẻ », hiện nay vẫn là một vấn đề đối với mọi cá nhân X có ý muốn chứng minh nó. Goldbach đưa ra khẳng định này trong một bức thư gửi cho Euler (1707 - 1783) vào năm 1742, nhưng không có chứng minh. Nhiều nhà toán học đã thử giải quyết vấn đề này, nhưng cho đến nay vẫn chưa ai khẳng định được nó đúng hay sai.

3.1.2. Tình huống có vấn đề và tình huống gợi vấn đề

Tình huống có vấn đề là tình huống trong đó tồn tại một vấn đề (theo nghĩa ở trên).

Tình huống gợi vấn đề là tình huống thoả mãn ba điều kiện sau:

a) Tồn tại một vấn đề.

b) Gợi nhu cầu nhận thức: Nếu tình huống có vấn đề, nhưng vì một lí do nào đó mà họ không có hứng thú tìm hiểu, suy nghĩ để tìm cách giải quyết (chẳng hạn vì họ cảm thấy chẳng có ích gì cho mình, hay vì quá mệt mỏi, …) thì đó cũng không phải là tình huống gợi vấn đề. Tình huống gợi vấn đề phải là tình huống tạo ra cho học sinh một cảm xúc hứng thú, mong muốn giải quyết vấn đề.

c) Gây niềm tin ở khả năng: Nếu vấn đề trong tình huống rất hấp dẫn, lôi cuốn và học sinh có nhu cầu giải quyết, nhưng nếu họ mau chóng cảm thấy vấn đề là quá khó, vượt quá khả năng của mình, thì họ cũng không còn hứng thú, không còn sẵn sàng giải quyết vấn đề. Tình huống gợi vấn đề phải bộc lộ mối quan hệ (có thể khá mờ nhạt) giữa vấn đề cần giải quyết và vốn kiến thức sẵn có của chủ thể, và tạo ra ở họ niềm tin rằng nếu tích cực suy nghĩ thì sẽ thấy rõ hơn mối quan hệ này và có nhiều khả năng tìm ra cách giải quyết.

Tóm lại, tình huống gợi vấn đề là tình huống gợi ra cho học sinh những khó khăn về lí luận hay thực tiễn mà họ thấy cần thiết và có khả năng vượt qua, nhưng không phải ngay tức thì nhờ vào một quy tắc có tính thuật toán, mà phải trải qua một quá trình tích cực suy nghĩ, hoạt động để đồng hoá nó hay điều chỉnh hệ thống kiến thức sẵn có nhằm thích nghi với điều kiện hành động mới.

Các điều kiện b và c ở trên cho phép phân biệt tình huống gợi vấn đề với tình huống có vấn đề. Một tình huống có vấn đề chỉ cần thoả mãn điều kiện a.

• **Ví dụ về tình huống có vấn đề**:

Trong giờ học về phương trình lượng giác cơ bản, giáo viên thực hiện pha hỏi bài cũ bằng cách yêu cầu học sinh giải bài toán : "Cho x các giá trị lần lượt là $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{5}$. Tính sinx". Một trong các mục đích chủ yếu là đi tới khẳng định rằng nếu cho trước một giá trị bất kì của x, thì luôn tìm được giá trị (có thể gần đúng) của sinx nhờ vào bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt, máy tính bỏ túi, hay đường tròn lượng giác.

Từ đó, giáo viên đặt ra vấn đề cần giải quyết :

Ngược lại, nếu cho trước một giá trị bất kì của sin x, chẳng hạn sinx = a với a là hằng số, thì liệu có tồn tại hay không giá trị x thỏa mãn sinx = a? Nếu có thì có bao nhiêu giá trị x? Xác định chúng như thế nào? Nói cách khác, giải phương trình sinx = a ra sao?

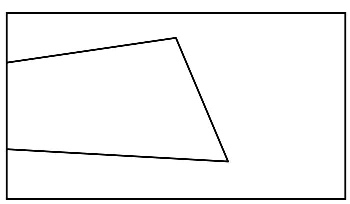
Tình huống trên là một tình huống có vấn đề, vì tồn tại trong đó một vấn đề mà cho đến thời điểm đó học sinh chưa có một phương pháp tổng quát nào để giải phương trình sinx = a. Tuy nhiên, nó có thể chưa phải là tình huống gợi vấn đề vì tình huống đặt ra như vậy chưa đảm bảm chắc chắn tạo ra ở học sinh sự hứng thú và nhu cầu muốn tiến hành giải quyết vấn đề.

• **Ví dụ về tình huống gợi vấn đề**: Bài toán «Chu vi tam giác cụt ».

Bài toán đã được đặt ra cho học sinh một lớp 8, Cộng hoà Pháp trong tình huống có thể mô tả như sau:

Học sinh làm việc theo nhóm. Mỗi nhóm khoảng 4 học sinh.

Giáo viên phát cho mỗi nhóm một bản phôtô hình vẽ trên giấy A_4 của một tam giác bị cắt đi một mảnh có chứa một đỉnh, mà ta gọi là tam giác cụt (hình dưới đây), một số dụng cụ và vật liệu như : 2 thước đo độ, 2 thước kẻ, 2 êke, 2 compa, 4 bút bi, 1 máy tính chỉ cho phép thực hiện 4 phép toán Cộng, Trừ, Nhân, Chia và nhiều tờ giấy trắng A_4 không trong suốt.



Giáo viên thông báo nhiệm vụ:

«Mỗi nhóm hãy thảo luận và nhất trí với nhau để viết cho học sinh của một lớp 8 khác một bản chỉ dẫn những việc họ cần làm để tính được chu vi của bất kì một tam giác bị cụt nào kiểu như trên. Biết rằng, các bạn học sinh nhận bản chỉ dẫn này cũng có những dụng cụ giống như các em (thước, thước đo độ, êke, compa, …), *nhưng chỉ có một tờ giấy A_4* trên đó có vẽ một tam giác cụt như các nhóm đã có, mà không có tờ giấy A_4 nào khác.

Các nhóm viết bản chỉ dẫn của mình trên một tờ giấy khổ lớn (một áp phích). Các áp phích này sẽ được đưa ra thảo luận giữa các nhóm để chọn ra một bản hướng dẫn đại diện cho cả lớp vàgửi cho học sinh lớp khác. »

Bình luận: Tình huống này thoả mãn ba điều kiện của tình huống gợi vấn đề.

• Tồn tại một vấn đề. Quả thực, cho đến thời điểm này học sinh chưa có một phương pháp có tính thuật toán nào để tính chu vi các tam giác cụt như vậy.

• Bài toán tạo ra ở học sinh sự tò mò, hứng thú và nhu cầu giải quyết vấn đề vì ba lí do chủ yếu sau:

– Bài toán khá khác lạ so với những bài toán tính chu vi mà học sinh thường gặp trong lớp. Nó thể hiện một sự độc đáo và thú vị.

– Nó được đặt trong tình huống phải thi đua giữa các nhóm để tạo ra một bản hướng dẫn đại diện cho lớp.

– Bản hướng dẫn sẽ được sử dụng bởi học sinh lớp khác. Điều này ảnh hưởng đến uy tín và danh dự của lớp.

• Dù là khác lạ, nhưng thoạt tiên, học sinh không cảm thấy quá khó phải bó tay, mà họ có thể tính đến nhiều phương án giải quyết khác nhau như : tìm phần bị thiếu bằng cách kéo dài hai cạnh bị cụt lên các tờ giấy khác hay trên mặt bàn, bằng gấp giấy hay bằng cách dùng phép đối xứng trục, … Chỉ đến khi hiểu rõ các ràng buộc của tình huống họ mới có thể nhận ra tính không hiệu quả của các cách giải quyết này. Ta nói, tồn tại các *chiến lược cơ sở* cho phép học sinh đưa ra những giải đáp ban đầu. Việc nhận ra khiếm khuyết của chiến lược cơ sở sẽ buộc học sinh phải điều chỉnh phương thức giải quyết.

Chính sự tồn tại chiến lược cơ sở, cùng với cảm giác quen thuộc về bài toán tính chu vi tam giác là một trong các nhân tố góp phần tạo ra ở học sinh niềm tin vào khả năng giải quyết được vấn đề đặt ra.

3.2. Một số cách tạo ra tình huống có vấn đề

Sau đây là một số cách tạo ra các tình huống « *có vấn đề* », chứ chưa phải là tình huống « *gợi vấn đề* ». Để chúng trở thành các tình huống « *gợi vấn đề* » cần phải đảm bảo rằng tình huống gợi ra ở học sinh nhu cầu nhận thức và niềm tin ở khả năng.

a) Quan sát thực nghiệm để hình thành dự đoán

Ví dụ: Tình huống có vấn đề liên quan tới định lí về trục đẳng phương của hai đường tròn (Hình học 10, NXB GD 2003).

– Với máy tính có trang bị phần mềm Cabri – Géométry và máy chiếu đa phương tiện, giáo viên vẽ hai đường tròn rời nhau (O_1, R_1) và (O_2, R_2).

– Lấy một điểm M bất kì.

– Dán lần lượt giá trị $\wp_{M/(O1)}$ và $\wp_{M/(O2)}$ lên màn hình[8].

– Yêu cầu học sinh so sánh kết quả.

---

[8] Trong môi trường Cabri, kết quả đo đạc (độ dài của đoạn thẳng, diện tích của một hình, …) luôn có đơn vị đi kèm (chẳng hạn, cm, cm^2). Do đó, khi tính phương tích (PT) bằng công thức $P_{M/(O)} = MO^2 - R^2$ hoặc $P_{M/(O)} = \overline{MA}.\overline{MB}$ kết quả đạt được luôn kèm theo đơn vị cm^2. Điều này làm HS hiểu không đúng bản chất của khái niệm PT (đó là một đại lượng không đơn vị).

Có thể khắc phục khiếm khuyết này bằng cách đưa vào một hệ trục tọa độ. Trong hệ tọa độ này, tính PT theo công thức $P_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$. Khi đó, kết quả đạt được là một số không có đơn vị đi kèm. Tuy nhiên, vì định nghĩa PT trong SGK không gắn liền với hệ trục tọa độ, nên cần làm "ẩn" hệ trục trên bằng cách chọn màu của các trục trùng với màu nền của màn hình. Cũng cần tạo một Macro cho phép tính tự động PT. Khi thay đổi vị trí của M giá trị của PT hiện trên màn hình sẽ tự động cập nhật.

Cần tạo một Macro để Cabri – Géométry có thể tính được một cách tự động phương tích của một điểm đối với một đường tròn, mà không kèm theo đơn vị đo cm (tham khảo luận văn tốt nghiệp của Trần Thị Ngọc Diệp, 2005).

– Di chuyển M, khi đó hai giá trị phương tích tương ứng cũng thay đổi theo. Yêu cầu học sinh quan sát và so sánh hai kết quả này (thường là khác nhau).

– Tạo tình huống có vấn đề trung gian : liệu có vị trí nào của M mà $\wp_{M/(O1)} = \wp_{M/(O2)}$? Có bao điểm M thoả điều kiện này ? Tập hợp tất cả những điểm M như vậy (quỹ tích) là hình gì ?

– Dịch chuyển M để đạt được ba vị trí thoả mãn

$$\wp_{M/(O1)} = \wp_{M/(O2}.$$

– Yêu cầu học sinh dự đoán quỹ tích của M (dự đoán mong đợi : đường thẳng vuông góc với đường nối tâm).

Có thể củng cố dự đoán bằng cách dùng Cabri – Géométry để kiểm tra tính thẳng hàng của ba điểm đã tìm được và tính vuông góc của đường thẳng tương ứng với đường nối tâm.

– Tình huống có vấn đề : Quỹ tích những điểm M có cùng phương tích với hai đường tròn cho trước có phải là một đường thẳng vuông góc với đường nối tâm hay không ? Chứng minh như thế nào ?

b) Lật ngược vấn đề

Ví dụ 1: Tình huống có vấn đề liên quan tới giải phương trình lượng giác sinx = a, trình bày trong mục trước, đã được tạo ra theo cách lật ngược vấn đề.

Ví dụ 2: Sau khi học xong định lí "nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm x_0, thì nó liên tục tại điểm đó".

Giáo viên có thể lật ngược vấn đề để tạo ra tình huống có vấn đề : Vậy ngược lại, nếu hàm số y = f(x) liên tục tại x_0, thì liệu nó có đạo hàm tại điểm đó không ?

c) Tương tự hoá

Ví dụ : Trong hình học phẳng, ta có định lí "Nếu ABC là một tam giác vuông tại A và H là chân đường cao hạ từ A, thì **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**".

Trong không gian xét hình tứ diện OABC, có ba cạch OA, OB, và OC vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu xem OABC tương tự với tam giác vuông trong mặt phẳng (đều là hình có số đỉnh ít nhất), liệu ta có tính chất tương tự không ? Nói cách khác ta có thể có đẳng thức **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** hay không ?

d) Khái quát hoá

Ví dụ : Trong mặt phẳng, đường thẳng có ba dạng phương trình khác nhau như sau :

– Phương trình tham số : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

– Phương trình chính tắc : $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

– Phương trình tổng quát : Ax + By + C = 0 với $A^2 + B^2 \neq 0$.

Khái quát hoá: Vậy liệu trong không gian, phương trình đường thẳng cũng có ba dạng sau đây không ?

$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$; $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ và Ax + By + Cz + D = 0.

e) Phát hiện sai lầm và nguyên nhân sai lầm

Yêu cầu học sinh phát hiện sai lầm, nguyên nhân sai lầm và sửa chữa sai lầm cũng tạo ra một tình huống có vấn đề, vì quả thực chưa có một lược đồ rõ ràng để thực hiện các nhiệm vụ trên.

• *Ví dụ 1: Giải pt* $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3-2x} = -1$ *(1).*

Lời giải của một học sinh:

"Lập phương hai vế của phương trình (1) ta có,

(1)⇔ 2x - 1 + 3 - 2x + 3.$\sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{3-2x}$ ($\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3-2x}$)= -1.

⇔ 3.$\sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{3-2x}$ = 3

⇔ (2x - 1)(3 - 2x) = 1

⇔ $x^2 - 2x + 1 = 0$ ⇔ x = 1".

Thông thường, học sinh đánh giá lời giải trên là đúng vì cho rằng các bước biến đổi trên là tương đương. Do đó, không có nhu cầu thử lại nghiệm.

Trong trường hợp này, giáo viên có thể tạo ra tình huống có vấn đề bằng cách yêu cầu họ thử lại nghiệm x = 1 để nhận ra sai lầm của lời giải. Từ đó, học sinh sẽ có nhu cầu tìm hiểu xem sai lầm ở đâu, và sửa chữa nó thế nào.

• Ví dụ 2. Trước bài toán « Giải phương trình $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5$ (1) ».

Một học sinh cho lời giải như sau :

« Pt (1) ⇔ $\sqrt{x-1+2.2.\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9} = 5$

⇔ $\sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 5$

⇔ $\sqrt{x-1}$ + 2 + $\sqrt{x-1}$ - 3 = 5

⇔ $\sqrt{x-1}$ = 3 ⇔ x - 1 = 9 ⇔ x = 10 ».

Tận dụng lời giải trên, có thể tạo ra một *tình huống có vấn đề* bằng các cách sau đây:

C1) Yêu cầu học sinh nhận xét lời giải trên. Sau khi xem xét, nếu cả lớp cho rằng lời giải đúng thì giáo viên khẳng định lời giải sai và yêu cầu họ tìm chỗ sai.

C2) Nếu cả lớp không nhận ra sai lầm, giáo viên yêu cầu học sinh thử kiểm tra giá trị x = 1 có là nghiệm của phương trình không, bằng cách thay trực tiếp vào phương trình ban đầu. Kết quả, học sinh nhận ra x = 1 là nghiệm, trong khi lời giải trên lại chỉ cho đáp số x = 10. Mâu thuẫn này tạo ra ở học sinh sự ngạc nhiên và nhu cầu muốn tìm hiểu xem sai lầm ở đâu.

C3) Nếu cả lớp không nhận ra sai lầm, giáo viên trình bày một lời giải, giả định là của một học sinh lớp khác như sau :

"Pt (1) ⇔ $\sqrt{x-1+2.2.\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9} = 5$

⇔ $\sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{x-1})^2} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 2 + 3 - \sqrt{x-1} = 5$

$\Leftrightarrow 5 = 5$ và $x \neq 1$.

Vậy phương trình có nghiệm là $\forall\ x \neq 1$".

Dự đoán rằng, học sinh vẫn công nhận lời giải này đúng. Điều này gây ra mâu thuẫn: hai lời giải đều đúng nhưng lại cho hai kết quả khác nhau.

Bình luận:

– Theo C2 và C3, các tình huống tạo ra dễ gây ở học sinh sự hứng thú và nhu cầu tìm kiếm nguyên nhân sai lầm hơn tình huống trong C1, vì các mâu thuẫn xuất hiện một cách tự nhiên và thú vị. Đặc biệt tình huống trong C3 dễ đảm bảo điều kiện "Gây niềm tin ở khả năng" hơn, vì học sinh dễ nhận ra một số biến đổi khác biệt trong hai cách giải và từ đó dễ tạo được niềm tin rằng nguyên nhân sai lầm chỉ quanh quẩn đâu đó xung quanh các biến đổi này. Nói cách khác, theo cách C3 ta có nhiều khả năng đạt được một tình huống gợi vấn đề.

Ngược lại, trong tình huống C1 chủ yếu là học sinh bị ép buộc làm theo yêu cầu của giáo viên, chứ không phải tự bản thân họ nhận ra mâu thuẫn và có nhu cầu giải quyết mâu thuẫn này. Vì thế, tình huống C1 có đặc trưng của tình huống có vấn đề, mà có thể chưa phải là tình huống gợi vấn đề.

– Trong các tình huống trên, chính giáo viên là người chủ động tạo ra tình huống có vấn đề. Tuy nhiên, tình huống có vấn đề có thể nảy sinh một cách tự nhiên hơn nhờ vào mâu thuẫn tạo ra bởi chính học sinh. Chẳng hạn, mâu thuẫn xuất hiện nhân cơ hội một học sinh khác trình bày một kết quả hay lời giải khác với học sinh nêu trên, mà thoạt tiên chưa học sinh nào phát hiện ra nguyên nhân.

– Các tình huống C1, C2 và C3 được tạo ra khi mà cả lớp đều không nhận ra sai lầm trong lời giải của học sinh đang xem xét. Nói cách khác, đó là tình huống có vấn đề đối với học sinh cả lớp.

Tuy nhiên, trong trường hợp giáo viên nhận ra một số học sinh trong lớp có thể phát hiện ra ngay sai lầm, thì không thể tạo ra tình huống có vấn đề đối với cả lớp được nữa. Nhưng có thể tạo ra tình huống có vấn đề đối với bộ phận học sinh khác, ít nhất là cũng đối với học sinh vừa cho lời giải trên.

f) Tạo ra mâu thuẫn và xung đột về mặt nhận thức

Cách thứ hai và thứ ba trong mục e) ở trên cho phép tạo tình huống có vần đề bằng cách tạo ra các mâu thuẫn, hay xung đột nhận thức ngay chính trong bản thân chủ thể (người học).

3.3. Dạy học đặt và giải quyết vấn đề

Ở đây, ta bàn đến dạy học đặt và giải quyết vấn đề ở cấp độ một phương pháp dạy học. Khi đó, nó là hình thức dạy học trong đó giáo viên (hay cùng học sinh) tạo ra một hay nhiều tình huống gợi vấn đề, tổ chức, điều khiển học sinh trình bày vấn đề và hoạt động giải quyết các vấn đề, qua đó giúp học sinh lĩnh hội kiến thức, rèn luyện kĩ năng, phát triển tư duy và đạt được các mục đích dạy học khác.

Một trong các mục đích chủ yếu của dạy học đặt và giải quyết vấn đề là làm cho học sinh lĩnh hội được kiến thức mới như là kết quả của quá trình giải quyết vấn đề. Nói cách

khác, kiến thức không được truyền thụ trực tiếp từ giáo viên, dưới dạng có sẵn, mà được khám phá dần theo quá trình giải quyết vấn đề.

Một mục đích cốt yếu khác của hình thức dạy học này là giúp học sinh phát triển các khả năng khác, như : khả năng phát hiện và trình bày vấn đề, khả năng tìm kiếm cách giải quyết vấn đề, khả năng tổ chức quá trình giải quyết vấn đề, khả năng kiểm tra đánh giá kết quả và phương pháp tiến hành giải quyết vấn đề, … Nói cách khác, nó cũng cung cấp cho học sinh những tri thức phương pháp[9].

• **Các bước chủ yếu của dạy học đặt và giải quyết vấn đề**:

a) Tạo tình huống gợi vấn đề (phát hiện vấn đề).

b) Trình bày vấn đề và đặt mục đích giải quyết vấn đề.

c) Giải quyết vấn đề: khám phá các phương pháp giải, chọn phương pháp giải thích hợp, trình bày lời giải.

d) Kiểm tra, đánh giá lời giải, kết quả và cả cách thức tìm kiếm lời giải.

e) Thể chế hoá kiến thức cần lĩnh hội.

Khái niệm thể chế hoá và sự khác biệt giữa kiến thức và tri thức: Khi một vấn đề đặt ra đã được giải quyết, có thể có một số kiến thức mới nảy sinh từ kết quả đạt được và rất có lợi để sử dụng về sau. Tuy nhiên, nếu ta chỉ dừng lại ở lời giải đã đạt được, thì những kiến thức bổ ích này cũng chỉ tồn tại dưới dạng kiến thức của cá nhân mỗi học sinh, như là kinh nghiệm của mỗi người rút ra từ hoạt động giải quyết vấn đề đã cho. Do đó, chúng không giống nhau ở mọi học sinh, và có thể việc sử dụng lại sau này là không hợp pháp.

Nhiệm vụ của giáo viên là biến các kiến thức cá nhân đó thành kiến thức chung (hay tri thức) có thể sử dụng về sau và sử dụng được một cách hợp pháp bởi mọi học sinh, bằng cách nêu lên và thông báo kiến thức này một cách tường minh dưới dạng một định lí, một công thức hay một quy tắc, phương pháp, … Khi đó, ta nói giáo viên đã thực hiện pha thể chế hoá. Nói cách khác, thể chế hoá là hành động biến một kiến thức có tính cá nhân thành một kiến thức có tính xã hội (hay một tri thức) [10].

Ví dụ 1: Sau khi tổ chức cho học sinh giải quyết xong các bài toán sau đây, mà định hướng khởi đầu là hạ bậc các biểu thức lượng giác bậc cao:

$$\sin 3x + \sin^3 x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x;$$

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2;$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3-\cos 6x}{4};$$

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(tgx+\cot gx)$$

thì một tri thức phương pháp rất có ích có thể được rút ra là: *«Khi giải các phương trình lượng giác phức tạp, nếu phương trình chứa các biểu thức lượng giác bậc cao thì có thể tính đến việc hạ bậc của các biểu thức này »*.

---

[9] Xem khái niệm tri thức phương pháp ở mục C phần 2.

[10] Để hiểu rõ hơn về vấn đề này, có thể tham khảo Y. Chevallard (1985).

Tuy nhiên, nếu tri thức này không được nêu lên, không được nhấn mạnh và thông báo công khai bởi giáo viên (nghĩa là không được thể chế hoá), thì nó cũng chỉ có thể tồn tại dưới dạng kiến thức của từng cá nhân học sinh. Nói cách khác, một số học sinh có thể nhận ra được kiến thức đó và biết áp dụng về sau. Nhưng cũng có học sinh không rút ra được lợi ích của định hướng phương pháp này, và vì thế về sau nếu có gặp một phương trình bậc cao tương tự họ cũng lúng túng, không biết giải quyết thế nào.

Ngược lại, nếu nó được thể chế hoá và được nhắc lại trong nhiều cơ hội khác, thì dần dần nó là một kiến thức bền vững ở nhiều học sinh.

Ví dụ 2: Trong sách giáo khoa toán những năm 1990, bất đẳng thức Bunhiacopxki dưới đây là đối tượng được dạy học một cách tường minh :

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) \text{ với mọi số thực } a_1, a_2, b_1, b_2.$$

Nó được trình bày dưới dạng một định lí trong sách giáo khoa Đại số 10.

Học sinh sau khi học bất đẳng thức này thì có quyền sự dụng nó vào việc giải quyết các bài toán khác.

Ngược lại, chương trình và sách giáo khoa hợp nhất thời kì 2000 – 2004 không đưa vào bất đẳng thức này. Bây giờ nó chỉ hiện diện dưới dạng một bài tập (bài tập 8 – Sách giáo khoa Đại số 10, NXB GD 2001, trang 77). Như vậy, về nguyên tắc, học sinh không có quyền sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki vào việc giải quyết các bài toán khác. Nếu muốn sử dụng, họ phải chứng minh lại bất đẳng thức này. Do đó, trong giờ bài tập, khi học sinh giải quyết xong bài tập 8 ở trên, giáo viên chỉ có thể để bất đẳng thức này tồn tại dưới dạng kiến thức cá nhân của mỗi học sinh, chứ không thể trình bày nó dưới dạng một định lí đã được chứng minh, hay không thể thông báo công khai rằng từ nay mọi học sinh có quyền sử dụng bất đẳng thức này (mà không cần chứng minh lại). Nói cách khác, giáo viên không thể thực hiện pha thể chế hoá, biến kiến thức cá nhân thành tri thức chung có thể sử dụng hợp pháp.

3.4. Các hình thức dạy học đặt và giải quyết vấn đề

Tuỳ theo vai trò của giáo viên và học sinh trong các bước của dạy học đặt và giải quyết vấn đề cũng như đặc trưng của tri thức đạt được, mà ta phân biệt ba hình thức dạy học chủ yếu sau đây.

a) Tự nghiên cứu giải quyết vấn đề

Đây là cấp độ cao nhất của dạy học đặt và giải quyết vấn đề. Nó được đặc trưng bởi các mặt sau đây :

Giáo viên (hoặc cùng học sinh) tạo ra tình huống gợi vấn đề, trình bày vấn đề. Sau khi vấn đề đã được giải quyết, giáo viên có trách nhiệm thực hiện pha thể chế hoá: đánh giá vai trò và ý nghĩa của kết quả đạt được, chuyển kiến thức có tính chất cá nhân thành thành tri thức chung, nhấn mạnh các tri thức phương pháp có thể rút ra từ quá trình nghiên cứu và giải quyết vấn đề.

Học sinh: độc lập tìm cách giải quyết vấn đề, trình bày lời giải, thực hiện pha kiểm tra và đánh giá. Như vậy họ phải hoạt động một cách tích cực, chủ động, tự giác, độc lập và sáng tạo.

Tri thức: Không được cho dưới dạng có sẵn, mà xuất hiện trong quá trình hình thành và giải quyết vấn đề, *được khám phá bởi chính học sinh.*

Tuỳ theo tình hình mà công việc của học sinh có thể được tổ chức dưới các hình thức khác nhau như :

– Làm việc cá nhân : mỗi học sinh làm việc một cách độc lập.

– Làm việc hợp tác : học sinh làm việc theo nhóm nhỏ, thảo luận, trao đổi trong tất cả các pha của dạy học đặt và giải quyết vấn đề.

– Đan xen giữa hai hình thức làm việc trên.

Ví dụ : • Giáo viên tạo tình huống gợi vấn đề:

– Vẽ lên bảng một tam giác ABC vuông tại A, các cạnh tương ứng là AB = c, AC = B và BC = a.

– Hỏi: ta đã biết công thức nào cho phép tính độ dài cạnh BC theo hai cạnh kia? Đáp án mong đợi là định lí Pythagore: $a^2 = b^2 + c^2$.

– Tạo tình huống có vấn đề: Như vậy, nếu biết A là góc vuông và độ dài hai cạnh kề nó thì ta có thể tính được độ dài cạnh còn lại. Nếu, bây giờ vẫn cho biết độ lớn góc A và độ dài hai cạnh kề nó, nhưng A là một góc bất kì, liệu có tính được độ dài cạnh thứ ba hay không?

• Giáo viên trình bày vấn đề:

Cho tam giác ABC bất kì. Có thể tìm được hay không công thức tính độ dài cạnh BC nếu biết độ dài hai cạnh còn lại là AC = b, AB = c và độ lớn góc A xen giữa hai cạnh này?

• Học sinh tự giải quyết vấn đề và thực hiện việc đánh giá.

• Giáo viên thực hiện pha thể chế hoá bằng cách trình bày định lí cosin trong tam giác, như là kết quả của việc giải quyết vấn đề trên.

b) Vấn đáp đặt và giải quyết vấn đề

Hình thức này có các đặc trưng sau:

Giáo viên xây dựng một hệ thống câu hỏi để gợi ý, dẫn dắt học sinh thực hiện tất cả các pha của dạy học đặt và giải quyết vấn đề, ngoại trừ pha thể chế hoá. Ở mức độ thấp hơn thì chính giáo viên thực hiện việc tạo tình huống có vấn đề và trình bày vấn đề.

Học sinh, nhờ vào hệ thống câu hỏi gợi ý dẫn dắt của giáo viên mà tự giác và tích cực nghiên cứu phát hiện, trình bày và giải quyết vấn đề.

Tri thức không được cho dưới dạng có sẵn và trực tiếp, mà xuất hiện trong quá trình hình thành và giải quyết vấn đề, *được khám phá nhờ quá trình tương tác giữa thầy và trò, trong đó trò đóng vai trò chính.*

c) Thuyết trình đặt và giải quyết vấn đề

Là cấp độ thấp nhất của dạy học đặt và giải quyết vấn đề.

Giáo viên thực hiện tất cả các khâu của hình thức dạy học này: Tạo tình huống gợi vấn đề, trình bày vấn đề, trình bày quá trình suy nghĩ tìm kiếm, dự đoán cách thức giải quyết vấn đề (chứ không đơn thuần trình bày lời giải), … Giáo viên trình bày cả quá trình tìm kiếm của

mình, có lúc thành công, có lúc thất bại, có lúc phải điều chỉnh phương hướng nhiều lần mới đi đến kết quả.

Nói cách khác, giáo viên phải đóng vai một học sinh đang tìm cách phát hiện và giải quyết vấn đề : tự đặt ra cho mình các câu hỏi, các nghi vấn, tự mày mò tìm kiếm các phương án giải quyết, rồi tự trả lời, … Điều quan trọng là trong quá trình này, giáo viên cần để lại những "khoảng lặng" để cho học sinh (người học) đủ thời gian cùng tham gia vào quá trình suy nghĩ, tìm kiếm câu trả lời như chính học sinh giả tưởng, chứ không cho câu trả lời ngay sau khi vừa đặt ra một câu hỏi, một nghi vấn nào đó.

Học sinh theo dõi quá trình nghiên cứu đặt và giải quyết vấn đề được trình bày bởi giáo viên. Trong quá trình này, họ cũng trải qua những thời điểm, những cảm xúc và thái độ khác nhau như một học sinh đang thực sự tham gia quá trình nghiên cứu, nhưng không trực tiếp giải quyết vấn đề.

Tri thức, mặc dù không được khám phá bởi chính học sinh, nhưng cũng không được truyền thụ dưới dạng có sẵn và trực tiếp, mà nảy sinh trong quá trình đặt và giải quyết vấn đề của giáo viên.

Các lưu ý:

a) Cần phân biệt hình thức vấn đáp đặt và giải quyết vấn đề với phương pháp đàm thoại (hay vấn đáp), hình thức thuyết trình đặt và giải quyết vấn đề với phương pháp thuyết trình. Những điểm khác biệt nhất cần nhấn mạnh là:

– Trong dạy học đặt và giải quyết vấn đề, điều mấu chốt là phải tạo ra các tình huống gợi vấn đề, như V. Okon (bản dịch tiếng việt của Phạm Hoàng Gia, 1976) đã viết :

"*Nét bản chất của dạy học nêu vấn đề không phải là sự đặt ra những câu hỏi mà là tạo ra các tình huống gợi vấn đề*" (V. Okon, 1976).

– Kiến thức xuất hiện trong quá trình đặt và nghiên cứu giải quyết vấn đề.

– Học sinh không chỉ lĩnh hội được kiến thức mới như là kết quả của quá trình giải quyết vấn đề, mà còn có thể lĩnh hội được tri thức phương pháp.

– Như vậy, dạy học đặt và giải quyết vấn đề dưới hình thức vấn đáp (hay thuyết trình) cũng là một kiểu dạy học theo phương pháp đàm thoại (hay thuyết trình), nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng.

Phát biểu sau đây của I. Ia. Lecne (1981) về hình thức Thuyết trình đặt và giải quyết vấn đề cho phép hiểu rõ hơn sự khác biệt này:

"*Bản chất của hình thức này không những nhằm giới thiệu cho học sinh cách giải quyết đã có đối với các vấn đề nhận thức khoa học hay thực tiễn ... mà còn giúp học sinh hiểu logic, những mâu thuẫn và cách giải quyết những mâu thuẫn đó* ".

b) Khả năng hoạt động một cách độc lập, tích cực và sáng tạo của học sinh tuỳ thuộc vào hình thức dạy học đặt và giải quyết vấn đề. Chẳng hạn trong hình thức thuyết trình, chính giáo viên thực hiện tất cả các bước của quá trình, học sinh chỉ theo dõi, lắng nghe và lĩnh hội lại tri thức (kể cả tri thức phương pháp) được truyền thụ trực tiếp từ giáo viên. Do vậy, dạy học đặt và giải quyết vấn đề dưới hình thức thuyết trình không thuộc vào nhóm phương pháp dạy học tích cực. Tuy nhiên, nó cũng cho phép phát huy tính tích cực của học sinh, vì trong quá trình đặt và giải quyết vấn đề của giáo viên, học sinh cũng luôn được đặt

trong những tình huống khó khăn, nghi vấn, tích cực suy nghĩ, … . Ngoại trừ việc giải quyết các nghi vấn, việc đưa ra phương án giải quyết khó khăn, … là do giáo viên thực hiện.

c) Ta có thể áp dụng dạy học đặt và giải quyết vấn đề không chỉ cho đối tượng học sinh khá giỏi, mà có thể cho cả các đối tượng học sinh khác. Chính với học sinh trung bình hay yếu, việc áp dụng hình thức này một cách thích hợp và hệ thống mới hy vọng giúp họ dần dần thoát khỏi cách học thụ động và lĩnh hội kiến thức một cách tích cực hơn. Hơn nữa, ở cấp độ thấp nhất, với học sinh trung bình hay yếu ta vẫn có thể vận dụng dạy học đặt và giải quyết vấn đề dưới hình thức thuyết trình[11].

d) Trong một giờ lên lớp, nói chung người ta không sử dụng độc nhất một phương pháp dạy học. Do đó, dạy học đặt và giải quyết vấn đề có thể chỉ xuất hiện trong một số công đoạn của giờ lên lớp. Hơn nữa, cũng cần tránh quan điểm cực đoan phải áp dụng hình thức dạy học này cho mọi nội dung cần giảng dạy.

Mặt khác, ngay cả khi áp dụng dạy học đặt và giải quyết vấn đề thì đôi khi ta không thể tuân thủ cứng nhắc một hình thức nào trong ba hình thức trên. Tuỳ diễn tiến của tình huống mà các hình thức này có thể được áp dụng đan xen nhau, hỗ trợ cho nhau.

e) Việc tạo ra một tình huống gợi vấn đề không phải dễ dàng. Quả thực, làm thế nào để vấn đề đặt ra đảm bảo đủ hai điều kiện: gợi nhu cầu nhận thức và gây niềm tin ở khả năng ? Đó là một câu hỏi lớn rất cần thiết được nghiên cứu trả lời.

Chính vì vậy, trong thực tế dạy học ở trường phổ thông, giáo viên thường chỉ mới dừng lại ở mức độ tạo ra được tình huống có vấn đề, chứ chưa phải là tình huống gợi vấn đề. Tuy nhiên, ngay cả khi chỉ tạo được tình huống có vấn đề, thì việc áp dụng đúng như các bước đã nêu của dạy học đặt và giải quyết vấn đề cũng mang lại hiệu quả cao hơn nhiều so với phương pháp dạy học truyền thống.

Câu hỏi và bài tập

1. Phân tích các ý kiến sau :

- Phương pháp dạy học của giáo viên sẽ là phương pháp tích cực nếu giáo viên trình bày bài giảng trong môi trường poiwerpoint với việc áp dụng các phần mềm dạy học (như Cabri – Géométry, Maple, …).
- Giáo viên đã áp dụng phương pháp tích cực nếu trong giờ lên lớp họ dành nhiều thời gian cho học sinh làm bài tập và khuyến khích được nhiều học sinh tích cực phát biểu tham gia xây dựng bài.

2. Hai khái niệm sau có đồng nhất không : Phương pháp dạy học tích cực và Tính tích cực của học sinh. Lấy ví dụ minh hoạ.

3. Phân biệt các khái niệm Vấn đề và Bài toán, Tình huống có vấn đề và Tình huống gợi vấn đề.

4. Phân tích các ý kiến sau :

- Trong dạy học đặt và giải quyết vấn đề, học sinh luôn hoạt động một cách độc lập, tự giác và sáng tạo.
- Trong dạy học đặt và giải quyết vấn đề điều quan trọng nhất là học sinh lĩnh hội được kết quả của quá trình giải quyết vấn đề.

[11] Tham khảo thêm Nguyễn Bá Kim (1991).

– Mục đích chính của dạy học đặt và giải quyết vấn đề là làm sao cho học sinh giải quyết được vấn đề đặt ra.
– Phương pháp thuyết trình và phương pháp đàm thoại không thể hiện tinh thần của dạy học đặt và giải quyết vấn đề.
– Chỉ có thể áp dụng dạy học đặt và giải quyết vấn đề đối với đối tượng học sinh khá giỏi.
– Dạy học theo phương pháp truyền thống chỉ cung cấp cho học sinh các tri rthức sự vật, mà không cung cấp cho họ tri thức phương pháp?
– Nếu dạy học theo phương pháp truyền thống thì học sinh không thể hoạt động tích cực được.
– Trong hoàn cảnh dạy học hiện nay ở trường phổ thông, không thể áp dụng dạy học đặt và giải quyết vấn đề được.

5. Ứng với mỗi cách tạo tình huống có vấn đề trình bày trong giáo trình hãy cho một ví dụ minh hoạ (không trùng với ví dụ đã nêu).

6. Xây dựng một hình thức dạy học đặt và giải quyết vấn đề các nội dung sau:
– Phương trình lượng giác cơ bản, trường hợp sinx = a (Đại số – Giải tích 11).
– Phương pháp quy nạp toán học (Đại số – Giải tích 11).
– Định lí sin trong tam giác (Hình học 10).
– Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai (Đại số 10).
– Phương trình đường thẳng trong không gian (Hình học 12).

7. Cho bài toán : Rút gọn biểu thức $Q = x\sqrt{x+2} - \sqrt{x^3 + 2x^2}$ (trình độ lớp 9).

Xét bài làm sau của một học sinh:

"$Q = x\sqrt{x+2} - \sqrt{x^3 + 2x^2} = \sqrt{x^3 + 2x^2} - \sqrt{x^3 + 2x^2} = 0$."

Từ bài làm này hãy tạo ra một tình huống gợi vấn đề. Giải thích vì sao đó là tình huống gợi vấn đề.

8. Để tạo một tình huống có vấn đề khi dạy học định lí sin trong tam giác, hai sinh viên cho các phương án sau:

Sinh viên 1:

« Chúng ta đã học xong định lí cosin trong tam giác, thì chúng ta đã biết công thức định lí cosin như thế nào rồi. Hôm nay, chúng ta sẽ sang một định lí mới cũng tương tự như định lí cosin, đó là định lí sin trong tam giác. Công thức định lí là:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ».

Sinh viên 2:

"Ta vừa chứng minh được rằng nếu ABC là một tam giác vuông thì ta luôn có hệ thức:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (*)$$

Hệ thức (*) vẫn đúng trong trường hợp ABC là một tam giác bất kì và hơn nữa ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Trong đó, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Điều này được thể hiện

qua một định lí có tên là định lí sin, được trình bày ở trang 46 sách giáo khoa, mà ta công nhận không chứng minh. ».

Hãy phân tích các phương án trên của sinh viên.

9. Xét một bài trong đề thi môn Phương pháp dạy học toán năm 2002/2003:

"Cho bài toán: Giải phương trình

$$\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=5 \ (1).$$

và bài làm sau của một học sinh:

« Pt (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2.2.\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 2 + \sqrt{x-1} - 3 = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3$

$\Leftrightarrow$ x - 1 = 9 $\Leftrightarrow$ x = 10 ».

Anh (chị) hãy tận dụng bài làm trên của học sinh để tạo ra một tình huống gợi vấn đề. "

Anh (chị) hãy phân tích phương án của hai sinh viên sau đây.

Sinh viên 1:

"*GV: Em hãy xem x = 1 có phải là nghiệm của phương trình (1) hay không ?*

HS: x = 1 là nghiêm của pt (1)

GV: Em hãy xem lại toàn bộ lời giải để xem lời giải sai ở đâu?

Đó là một tình huống gợi vấn đề vì, ...".

Sinh viên 2:

"*- Cho học sinh cả lớp nhận xét lời giải và thử lại nghiệm x = 10 (dù các phép biế đổi đều tương đương).*

- Nếu học sinh vẫn không nhận ra sai lầm và khẳng định lới giải đúng, thì yêu cầu học sinh thử x = 5 vào pt (1) để họ nhận ra rằng x = 5 cũng là một nghiệm của pt (1).

Trong lời giải trên, các phép biến đổi đều tương đương. Vậy tại sao lại mất nghiệm ?".

Phần 2

CÁC TÌNH HUỐNG ĐIỂN HÌNH TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

A. Dạy học các khái niệm toán học

1. Khái niệm là gì ?

Theo Alain Rieunier (2001):

– *Khái niệm* là một tư tưởng tổng quát và trừu tượng được gán cho một lớp các đối tượng và dùng để tổ chức các kiến thức.

– *Định nghĩa khái niệm* là một phương tiện trình bày tư tưởng này.

– *Dạy học một khái niệm* là dạy học nghĩa của « từ » hay « cụm từ » chỉ khái niệm ấy.

2. Vai trò của khái niệm

2.1. Khái niệm vừa là sản phẩm vừa là phương tiện của quá trình tư duy

Trong việc nhận thức thế giới, con người có thể đạt tới các mức độ nhận thức khác nhau, từ thấp tới cao, từ đơn giản đến phức tạp. Hai mức độ nhận thức thế giới của con người là:

– Nhận thức cảm tính (bao gồm cảm giác và tri giác), trong đó con người phản ánh những cái bên ngoài, những cái đang trực tiếp tác động đến các giác quan con người.

– Nhận thức lí tính (còn gọi là tư duy), trong đó con người phản ánh những cái bản chất bên trong, những mối quan hệ có tính quy luật.

Tư duy là mức độ nhận thức quan trọng, cơ bản nhất của con người để hiểu và cải tạo thế giới.

Kết quả của hành động (quá trình) tư duy là đi đến những sản phẩm trí tuệ : khái niệm, phán đoán, suy luận.

Đến lượt mình, các khái niệm, các phán đoán đã được khẳng định, các hình thức suy luận lại tạo cơ sở cho tư duy. Tư duy không thể tách rời khái niệm, phán đoán và suy luận.

Xét dưới quan điểm của logic hình thức, thì tư duy là hợp thành của ba yếu tố : khái niệm, phán đoán, và suy luận.

Như vậy, khái niệm là một yếu tố không thể thiếu trong hoạt động tư duy của con người.

2.2. Khái niệm vừa là cơ sở của khoa học toán học, vừa là động lực phát triển của toán học

Dù cho nguồn gốc của toán học là thực nghiệm, thì toán học chủ yếu vẫn là một khoa học suy diễn, nghĩa là một khoa học được xây dựng từ những khái niệm cơ bản và những tiên đề nhờ vào việc áp dụng những quy tắc và phương pháp suy luận logic. Các khái niệm học trước là cơ sở xây dựng các khái niệm sau, các khái niệm sau được định nghĩa hay được minh hoạ, mô tả nhờ vào các khái niệm học trước, chúng tạo nên một hệ thống trong khoa học toán học mà ta có thể sơ đồ hoá như sau:

<table>
<tr><td colspan="2">Hệ tiên đề</td></tr>
<tr><td colspan="2">Logic</td></tr>
<tr><td>Các khái niệm cơ bản
(đối tượng cơ bản, quan hệ cơ bản)</td><td>Các nhóm tiên đề</td></tr>
<tr><td>Các khái niệm khác
(được định nghĩa nhờ vào các khái niệm cơ bản)</td><td>Các định lí
(được chứng minh dựa vào các tiên đề)</td></tr>
</table>

Như vậy, các khái niệm là vật liệu cơ sở của việc xây dựng toàn bộ khoa học toán học.

Mặt khác, phân tích lịch sử và khoa học luận toán học chứng tỏ rằng sự nảy sinh một khái niệm toán học mới thường đánh dấu một giai đoạn phát triển của toán học và là nền tảng cho bước phát triển tiếp theo, chẳng hạn như các khái niệm Số phức, Giới hạn, Đạo hàm, …

2.3. Hình thành các khái niệm toán học cho học sinh là một trong những nhiệm vụ mấu chốt của dạy học toán ở trường phổ thông

Hai trong các mục đích chủ yếu của dạy học toán ở trường THPT là:

– Cung cấp cho học sinh một hệ thống vững chắc những kiến thức và kĩ năng toán học.

– Phát triển ở học sinh những năng lực và phẩm chất trí tuệ. Chủ yếu là rèn luyện các thao tác và phẩm chất tư duy, khả năng quan sát và tưởng tượng, rèn luyện tư duy logic và ngôn ngữ chính xác.

Phân tích ở các mục 2.1 và 2.2 cho thấy rằng, việc hình thành các khái niệm cho học sinh là vấn đề trung tâm cho phép đạt được các mục tiêu này.

"*Trong việc dạy học toán, cũng như việc dạy học bất cứ một khoa học nào khác ở trường phổ thông, điều quan trọng bậc nhất là hình thành một cách vững chắc cho học sinh một hệ thống khái niệm. Đó là cơ sở của toàn bộ kiến thức Toán học của học sinh, là tiền đề quan trọng để xây dựng cho họ khả năng vận dụng các kiến thức đã học. Quá trình hình thành các khái niệm có tác dụng lớn đến việc phát triển trí tuệ, đồng thời cũng góp phần giáo dục thế giới quan cho học sinh (qua việc nhận thức đúng đắn quá trình phát sinh và phát triển của các khái niệm Toán học)*" (Hoàng Chúng, 1995, tr.116).

3. Nội hàm và ngoại diên của khái niệm

3.1. Thuộc tính bản chất và thuộc tính đặc trưng của khái niệm

Thuộc tính bản chất của một đối tượng *là thuộc tính gắn liền với đối tượng. Nếu mất thuộc tính này, thì đối tượng không còn là nó, mà là một đối tượng khác. Thuộc tính bản chất là điều kiện cần để xác định đối tượng.*

Thuộc tính bản chất của một khái niệm *là thuộc tính bản chất chung của mọi đối tượng được phản ánh trong khái niệm.*

Thuộc tính đặc trưng của một khái niệm *là thuộc tính mà chỉ có những đối tượng được phản ánh trong khái niệm mới có. Thuộc tính này là điều kiện cần và đủ để xác định đối tượng.*

Như vậy, có thể xem thuộc tính đặc trưng của khái niệm là tổ hợp một số thuộc tính bản chất của nó.

Ví dụ: Một số thuộc tính bản chất của khái niệm "Hình bình hành" là:

– Tứ giác lồi.
– Các cặp cạnh đối diện song song với nhau.
– Các đường chéo cắt nhau tại điểm giữa mỗi đường.
– Các góc ở các đỉnh đối diện bằng nhau
– Các cạnh đối diện bằng nhau.

Một số thuộc tính đặc trưng của khái niệm này là:

– Tứ giác lồi có hai đường chéo cắt nhau tại điểm giữa mỗi đường.
– Tứ giác lồi có ít nhất một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.
– Tứ giác lồi có các cặp cạnh đối diện song song với nhau.

3.2. Nội hàm và ngoại diên của khái niệm

• **Nội hàm** của một khái niệm là tập hợp tất cả các thuộc tính bản chất của khái niệm, nghĩa là tập hợp tất cả những thuộc tính chung, bản chất của tất cả các đối tượng được phản ánh trong khái niệm.

• **Ngoại diên** (hay phạm vi) của một khái niệm là tập hợp tất cả các đối tượng có những thuộc tính chung bản chất được phản ánh trong khái niệm.

Tuy nhiên, tập tất cả các thuộc tính chung bản chất này thường rất đồ sộ. Do vậy, ta có thể hiểu ngoại diên của một khái niệm là tập hợp tất cả các đối tượng có ít nhất một thuộc tính đặc trưng của khái niệm đó.

Ví dụ : Các thuộc tính sau nằm trong nội hàm của khái niệm Cấp số cộng :

– Là một dãy số.
– Kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi số hạng đều là tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi.
– Kể từ số hạng thứ hai trở đi (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng kề ngay bên nó.
– …

Ngoại diên của khái niệm này là tập hợp tất cả các cấp số cộng.

• **Quan hệ giữa nội hàm và ngoại diên** : Nội hàm càng rộng thì ngoại diên càng hẹp, nội hàm càng hẹp thì ngoại diên càng rộng.

Chẳng hạn, nội hàm của hình vuông chứa nội hàm của hình chữ nhật, vì khái niệm hình vuông có tất cả các thuộc tính bản chất của khái niệm hình chữ nhật, ngoài ra nó còn có các thuộc tính khác mà hình chữ nhật không có như : "Tất cả các cạnh đều bằng nhau" ; "Hai đường chéo vuông góc với nhau".

Ngược lại, tập hợp tất cả các hình vuông (ngoại diên của khái niệm hình vuông) lại là tập con của tập hợp tất cả các hình chữ nhật.

3.3. Khái niệm loại và khái niệm chủng

Xét khái niệm a có ngoại diên là tập hợp A và khái niệm b có ngoại diên là tập hợp B.

Nếu A ⊃ B thì ta nói a là khái niệm loại của khái niệm B, còn b được gọi là khái niệm chủng của khái niệm a.

Ví dụ : Khái niệm tứ giác là khái niệm loại của khái niệm hình bình hành. Khái niệm hình vuông là khái niệm chủng của khái niệm hình thoi.

4. Định nghĩa khái niệm

Định nghĩa một khái niệm là một thao tác logic nhằm phân biệt lớp các đối tượng xác định khái niệm này với các đối tượng khác, thường là bằng cách vạch ra thuộc tính đặc trưng của khái niệm đó.

4.1. Một số hình thức định nghĩa khái niệm

Sau đây là một số cách định nghĩa các khái niệm thường dùng ở trường phổ thông.

a) Định nghĩa bằng cách nêu rõ loại và thuộc tính đặc trưng của chủng

Lôgic hình thức vạch rõ rằng, định nghĩa một khái niệm không nhất thiết phải kèm theo việc nêu ra tất cả các thuộc tính bản chất của khái niệm đó. Vả lại, điều này cũng khó có thể thực hiện được, vì tập hợp tất cả các thuộc tính này (nội hàm của khái niệm) thường rất đồ sộ.

Để vượt qua trở ngại này, phương pháp khá phổ biến là làm rõ nội hàm của khái niệm cần định nghĩa bằng cách chỉ ra khái niệm loại gần nhất của nó (nó thuộc loại nào) và dấu hiệu cho phép phân biệt các đối tượng được phản ánh trong khái niệm cần định nghĩa với các đối tượng khác thuộc loại vừa nêu. Đó chính là cách định nghĩa bằng cách nêu rõ loại và thuộc tính đặc trưng của chủng.

Ta có thể sơ đồ hoá hình thức định nghĩa này như sau :

Khái niệm được định nghĩa (khái niệm mới)	**Def** =	**Khái niệm loại** (khái niệm đã biết)	+	**Thuộc tính đặc trưng của chủng** (diễn tả khác biệt về chủng)

(Def là viết tắt của từ définition – định nghĩa, dùng để phân biệt định nghĩa với mệnh đề, định lí).

Ví dụ : Định nghĩa khái niệm Lăng trụ đứng.

"*Một hình lăng trụ được gọi là lăng trụ đứng nếu các cạnh bên của nó vuông góc với đáy*" (Hình học 11, NXB GD 2001).

Định nghĩa này có thể phát biểu lại dưới dạng :

Lăng trụ đứng	*(Khái niệm mới)*
là hình lăng trụ	*(Khái niệm loại)*
có các cạnh bên vuông góc với đáy.	*(Thuộc tính đặc trưng của chủng)*

• Định nghĩa theo hình thức trên là đi từ khái niệm có ngoại diên rộng hơn đến khái niệm có ngoại diên hẹp hơn và thường được dùng để định nghĩa các khái niệm đối tượng.

Ví dụ : Tứ giác → Hình bình hành → Hình chữ nhật → Hình vuông.

b) Định nghĩa bằng cách nêu rõ thuộc tính đặc trưng của chủng, còn khái niệm loại chỉ xuất hiện ngầm ẩn

Ví dụ 1 : Định nghĩa khái niệm Hàm số đồng biến trên khoảng (a,b) (Đại số 10, NXB GD 2001) :

"*Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a,b).*

Hàm số y = f(x) gọi là đồng biến (hay tăng) trên khoảng (a,b) nếu với mọi số thực x_1 *và* x_2 *thuộc (a,b) ta có :* $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$".

Ví dụ 2 : Định nghĩa khái niệm hai đường thẳng song song.

"*Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung*". (Hình học 12, NXB GD 2001).

Các khái niệm về quan hệ (như hai đường thẳng chéo nhau, hai phương trình tương đương, …) thường được định nghĩa dưới hình thức này.

Trường hợp đặc biệt : định nghĩa có sử dụng các lượng từ $\forall$, $\exists$

Ví dụ : "*Một đường thẳng Δ gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng đó*". (Hình học 11. NXB GD 2001, tr. 60).

c) Định nghĩa bằng kiến thiết

Trong trường hợp này, người ta không vạch rõ khái niệm loại (nó thuộc loại nào) cũng như các thuộc tính bản chất của chủng, mà mô tả cách tạo ra đối tượng được xem là tổng quát và đại diện cho lớp các đối tượng xác định khái niệm.

Ví dụ : "*Cho hai hình tròn bằng nhau C(O,R) và C(O',R') có trục chung OO'. Ứng với mỗi điểm M thuộc C(O,R), ta dựng điểm M' sao cho* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$. *Khi điểm M chạy khắp hình tròn C(O,R), đoạn MM' tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay (hình 5.2), được gọi tắt là hình trụ.*" (Hình học 11, NXB GD 1991, Trần Văn Hạo chủ biên).

d) Định nghĩa bằng truy hồi

Có thể xem đây là trường hợp đặc biệt của định nghĩa bằng kiến thiết.

Ví dụ : Dãy (u_n) được định nghĩa như sau :

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ với } \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Trong đó f là một hàm số.

Tổng quát hơn :

$u_1 = a$.

$u_{n+1} = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ với mọi $n \geq 1$, trong đó f là một hàm số.

e) Định nghĩa bằng quy ước

Vấn đề là nêu lên ý nghĩa của kí hiệu, của danh từ mà ta mới đưa vào.

Ví dụ: *"Cho a là số thực khác 0. Ta định nghĩa* $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Với n nguyên dương lớn hơn 1 ta định nghĩa

$$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{''}.$$

(Đại số – Giải tích 11, NXB GD 1996, Trần Văn Hạo chủ biên).

f) Định nghĩa bằng "phô bày"[12] *(par ostension)*

Định nghĩa theo hình thức này không vạch rõ khái niệm loại cũng như các thuộc tính bản chất của khái niệm, mà đơn thuần chỉ là sự "dán nhãn" cho một đối tượng được coi là tổng quát và đại diện cho lớp các đối tượng cụ thể xác định khái niệm đó.

Ví dụ : Định nghĩa các khái niệm Phương tích của một điểm đối với một đường tròn (Hình học 10, NXB GD 2001), Phương trình chính tắc của Elip (Hình học 12, NXB GD 2001) là các định nghĩa bằng phô bày.

- *"Giá trị* $\overline{MA}.\overline{MB}$ *không đổi nói trong định lí trên được gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn O và kí hiệu là* $\wp_{M/(O)}$*."*
- *"Phương trình trên gọi là phương trình chính tắc của elip (E) đã cho."*

4.2. Khái niệm cơ bản (khái niệm nguyên thuỷ)

Định nghĩa một khái niệm đòi hỏi phải sử dụng một số khái niệm đã biết trước đó. Cứ tiếp tục như thế, ắt phải đi đến các khái niệm xuất phát ban đầu không được định nghĩa. Ta gọi đó là các khái niệm cơ bản (hay khái niệm nguyên thuỷ) của toán học. Chẳng hạn như các khái niệm Điểm, Đường thẳng, Mặt phẳng, Tập hợp, Quy tắc, …

Ví dụ : "*Giả sử X và Y là hai tập hợp số.*

Một hàm số f từ X đến Y là một quy tắc cho ứng mỗi giá trị $x \in X$ *một và chỉ một giá trị* $y \in Y$*, mà ta kí hiệu là* $y = f(x)$." (Đại số 10, NXB GD 1990, Trần Văn Hạo chủ biên).

Định nghĩa khái niệm hàm số như vậy đã dựa trên một khái niệm khác, không được định nghĩa, đó là khái niệm "Quy tắc".

■ **Chú ý**: Nói các khái niệm đầu tiên này không được định nghĩa, theo nghĩa không được định nghĩa một cách "tường minh". Vì thực ra, các khái niệm này có thể có một "định nghĩa" không tường minh, thông qua mô tả :

"*Một hạt cát rất nhỏ, một dấu chấm nhỏ của bút chì trên tờ giấy là hình ảnh của điểm. Một phần sợi chỉ căng thẳng, một đoạn dòng kẻ là hình ảnh của một phần đường thẳng. Một mặt bàn phẳng, một mặt hồ yên lặng là hình ảnh của một phần mặt phẳng.*" (Hình học 11, NXB GD 1991, Trần Văn Hạo chủ biên).

Trong toán học, ngoài các khái niệm được định nghĩa và các khái niệm cơ bản, cũng còn có những khái niệm khác, có "Tên", không có định nghĩa và được sử dụng một cách tường minh, như khái niệm "Tham số".

4.3. Cấu trúc logic của định nghĩa

[12] Hay : Định nghĩa bằng cách chỉ ra.

a) Đối với định nghĩa nêu rõ loại và thuộc tính đặc trưng của chủng

Gọi A là ngoại diên của khái niệm loại, B là ngoại diên của khái niệm chủng (khái niệm được định nghĩa), P(x) là thuộc tính đặc trưng của chủng (đối tượng x có tính chất P), thì định nghĩa theo hình thức này có thể được viết dưới dạng cấu trúc logic sau :

$$B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid P(x)\}$$

hay :

$$x \in B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (x \in A) \wedge P(x)$$

Ví dụ : Xét định nghĩa khái niệm lăng trụ đứng.

"*Một hình lăng trụ được gọi là lăng trụ đứng nếu các cạnh bên của nó vuông góc với đáy*".

Kí hiệu :

A là tập hợp tất cả các hình lăng trụ,

B là tập hợp tất cả các hình lăng trụ đứng,

P(L) là tính chất : Lăng trụ L có các cạnh bên vuông góc với đáy.

Ta có cấu trúc logic của định nghĩa trên là :

$$B \overset{\text{Def}}{=} \{L \in A \mid P(L)\} \quad \text{hay} \quad L \in B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (L \in A) \wedge P(L)$$

• **Chú ý** : Nếu kí hiệu :

Q(L) là tính chất : L là một lăng trụ đứng,

R(L) là tính chất : L là một lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy.

Thì ta lại có một cấu trúc logic khác của định nghĩa trên :

$$Q(L) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} R(L)$$

b) Đối với định nghĩa chỉ nêu rõ thuộc tính đặc trưng

Cấu trúc logic của chúng thường có dạng :

$$P(x,y) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} Q(x,y) \wedge R(x,y)$$

Ví dụ : "*Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung*" (Hình học 12, NXB GD 2001).

P(a,b) : Quan hệ "Đường thẳng a song song với đường thẳng b"

Q(a,b) : Tính chất : "hai đường thẳng a và b đồng phẳng"

R(a,b) : Tính chất : "Hai đường thẳng a và b không có điểm chung".

Cấu trúc logic của định nghĩa trên là :

$$P(a,b) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} Q(a,b) \wedge R(a,b)$$

5. Cơ chế hoạt động và các hình thức thể hiện của khái niệm

Hoạt động của khái niệm trong một phạm vi nào đó bao hàm đồng thời cách đưa khái niệm vào phạm vi này, hình thức thể hiện và cách tổ chức của khái niệm trong phạm vi, cách sử dụng khái niệm như là công cụ giải quyết các bài toán, và cách tác động của khái niệm với các khái niệm khác (trong toán học hay trong các khoa học khác, ...).

Sau đây, ta đề cập một vài hình thức hoạt động và hình thức thể hiện tổng quát nhất của khái niệm.

5.1. Cơ chế hoạt động của khái niệm

R. Douady (1986) phân biệt ba dạng (hay cơ chế) hoạt động khác nhau của một khái niệm toán học : cơ chế "Đối tượng", cơ chế "Công cụ ngầm ẩn", và cơ chế "Công cụ tường minh".

■ **Cơ chế công cụ :**

Ta nói, một khái niệm hoạt động dưới dạng ***Công cụ*** khi nó được sử dụng một cách ngầm ẩn hay rõ ràng như phương tiện để giải quyết một bài toán, một vấn đề.

Ta nói đến ***Công cụ rõ ràng*** đối với các khái niệm được vận dụng bởi chủ thể và chủ thể có thể trình bày, giải thích việc dùng chúng.

Ta nói đến ***Công cụ ngầm ẩn*** đối với các khái niệm được vận dụng ngầm ẩn bởi chủ thể, và chủ thể không thể trình bày hay giải thích việc sử dụng này.

Ví dụ 1 : Sau khi đưa vào định nghĩa khái niệm đạo hàm, khái niệm này đã được sử dụng như công cụ tường minh trong việc giải quyết các bài toán tiếp tuyến, khảo sát hàm số, tính tích phân, ...

Ví dụ 2 : Một giáo viên yêu cầu học sinh lớp 7 (chưa học về số vô tỉ) trả lời câu hỏi : "Tồn tại hay không một hình vuông diện tích bằng 12 cm^2 ?".

Câu trả lời của một học sinh : "Một hình vuông có cạnh 3cm, thì diện tích của nó là $9cm^2$, một hình vuông cạnh 4cm, thì diện tích là $16cm^2$. Cho nên, khi cạnh thay đổi từ 3cm đến 4cm, phải có một lúc nào đó diện tích sẽ là $12cm^2$".

Một số khái niệm toán học hoạt động ngầm ẩn như là công cụ trong câu trả lời này, chẳng hạn : Hàm số (tương ứng giữa kích thước của cạnh và diện tích của hình vuông) ; Hàm số liên tục trên một khoảng.

■ **Cơ chế đối tượng** :

Ở cấp độ tri thức khoa học, một khái niệm hoạt động dưới dạng Đối tượng, theo nghĩa một đối tượng văn hoá có vị trí trong cơ cấu tổ chức rộng hơn, đó là tri thức khoa học ở một thời điểm đã cho, được thừa nhận bởi xã hội. Chúng là đối tượng nghiên cứu của các nhà toán học.

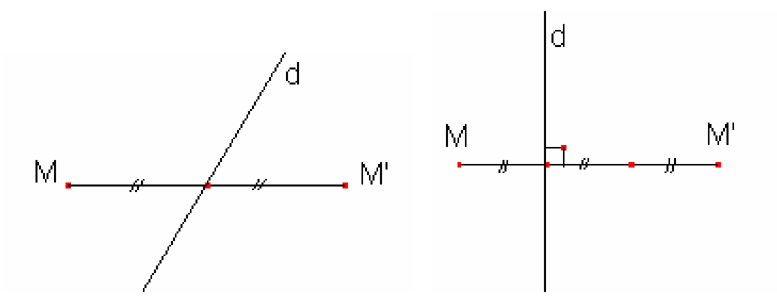
Trong phạm vi của toán học ở trường phổ thông, ta hiểu một khái niệm hoạt động dưới dạng Đối tượng khi nó là đối tượng được nghiên cứu (được định nghĩa, được khai thác các tính chất, …).

Ví dụ:

Khi ta đưa ra định nghĩa khái niệm Phép đối xứng trục và nghiên cứu một số tính chất của nó (bảo toàn khoảng cách, góc, biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm thẳng hàng,..), khi đó, khái niệm này đang là đối tượng nghiên cứu : hay nó đang hoạt động dưới dạng đối tượng.

Khi ta yêu cầu học sinh xét xem trong các tương ứng sau (biến điểm M bất kì thành điểm M' theo quy tắc thể hiện qua hình vẽ), tương ứng nào là phép đối xứng trục, thì khái niệm vẫn hiện diện trong vai trò đối tượng.

Khi giải bài toán : « Cho bai điểm phân biệt A và B nằm về cùng một phía của đường thẳng d cho trước. Tìm trên D điểm M thoả mãn : khoảng cách MA + MB đạt giá trị lớn nhất. », nếu ta dùng phép đối xứng trục để giải, thì khi đó khái niệm này hoạt động như là công cụ (hay có cơ chế công cụ).



5.2. Các hình thức thể hiện khác nhau của khái niệm

Theo Yves Chevallard (1991), một khái niệm toán học có thể thể hiện dưới ba hình thức sau đây:

• Khái niệm tiền toán học (protomathématique) : không tên, không định nghĩa, hoạt động như một công cụ ngầm ẩn.

Chẳng hạn khái niệm hàm số liên tục trên một khoảng đã nêu ở ví dụ 2, mục 5.1.

• Khái niệm gần toán (paramathématique) : có tên, không có định nghĩa. Chúng là những khái niệm công cụ của hoạt động toán học. Nói chung, chúng không phải là đối tượng nghiên cứu của các nhà toán học.

Chẳng hạn, khái niệm Tham số.

• Khái niệm toán học : Chúng vừa là đối tượng nghiên cứu vừa là công cụ được vận dụng để giải quyết các vấn đề. Chúng có tên và được định nghĩa (theo nghĩa chặt chẽ, hay theo kiểu quy ước, mô tả, kiến thiết, …).

• **Chú ý** : Các cơ chế hoạt động và các hình thức thể hiện của một khái niệm chỉ có tính chất tương đối. Việc phân biệt phải căn cứ vào: cấp độ, nơi, thời gian, phạm vi toán học,…

Chẳng hạn, trước đây khái niệm chứng minh là một khái niệm gần toán, nhưng ngày nay nó là khái niệm toán học, là đối tượng nghiên cứu trong logic toán.

6. Các tiến trình khác nhau về dạy học khái niệm

Việc dạy học các khái niệm toán học có thể được thực hiện theo những quy trình khác nhau. Nhưng nói chung, đa số các khái niệm toán ở trường phổ thông, thường được dạy học theo hai tiến trình cơ bản sau :

– Tiến trình : Đối tượng → Công cụ.
– Tiến trình : Công cụ → Đối tượng → Công cụ.

6.1. Tiến trình : Đối tượng → Công cụ

Trong tiến trình này, khái niệm xuất hiện trước hết với cơ chế đối tượng (nó là đối tượng nghiên cứu), sau đó mới được sử dụng như là công cụ để giải quyết các vấn đề (toán học hoặc không).

Ở đây, ta lại phân biệt hai con đường khác nhau trong tiến trình « Đối tượng → Công cụ»: Con đường quy nạp và con đường suy diễn.

6.1.1. Con đường quy nạp (Démarche inductive)

■ **Các giai đoạn chủ yếu của con đường này**

• *Bước 1: Nghiên cứu một số trường hợp đơn lẻ và phác thảo định nghĩa.*

Giáo viên tổ chức cho học sinh nghiên cứu một số đối tượng đơn lẻ thuộc lớp các đối tượng xác định khái niệm cần định nghĩa và một vài đối tượng không thuộc lớp này, trong đó khái niệm xuất hiện dưới hình thức « có tên, nhưng chưa có định nghĩa ». Tên của khái niệm do giáo viên thông báo, nhưng chưa cho định nghĩa khái niệm.

Học sinh, với sự hướng dẫn của giáo viên, sẽ khám phá dần dần các thuộc tính bản chất của khái niệm (nhờ vào các thao tác tư duy phân tích, so sánh, tổng hợp) thể hiện trong các trường hợp đơn lẻ, cụ thể được nghiên cứu. Từ đó, nhờ vào thao tác khái quát hoá, trừu tượng hoá, học sinh trình bày phác thảo ban đầu về định nghĩa của khái niệm.

Nói cách khác, học sinh tiếp xúc với khái niệm, trước khi tìm cách định nghĩa nó. Qua quan sát, phân tích các trường hợp đơn lẻ mà học sinh hình thành (hay điều chỉnh) các biểu tượng[13] về đối tượng được phản ánh trong khái niệm để đi đến xây dựng định nghĩa.

Nói cách khác, khái niệm được trừu tượng hoá khỏi các dấu hiệu đơn lẻ của các tri giác riêng biệt và biểu tượng, là kết quả của khái quát hoá các tri giác và biểu tượng này.

Chú ý : Tên của khái niệm có thể được giáo viên thông báo vào một thời điểm thích hợp (không cố định) : ngay từ đầu, hoặc sau khi học sinh nghiên cứu các trường hợp cụ thể đã cho, …

[13] « Lúc một sự vật không được nhìn nhận qua những cảm giác và hành động, mà vẫn gợi nên sự tồn tại của nó, tức là đã hình thành một biểu tượng của sự vật ấy. Một thế giới thứ hai, thế giới biểu tượng xuất hiện đi đôi với thế giới của cảm giác và vận động (của mắt thấy, tai nghe, tay sờ). Và từ đó, hoạt động của con người không hoàn toàn lệ thuộc vào sự có mặt cụ thể của sự vật nữa, mà có thể vận dụng những hình tượng của sự vật sắp đi xếp lại trong « đầu óc » của mình, trước và sau hành động cụ thể. » (Từ điển tâm lí – Nguyễn Khắc Viện, NXB Văn hóa Thông tin, 2001).

Như vậy, mục đích chính của bước này là:

– Hình thành (hay điều chỉnh) biểu tượng về khái niệm.

– Phát hiện một số thuộc tính bản chất của khái niệm.

– Phác thảo định nghĩa khái niệm.

• *Bước 2*: *Trình bày định nghĩa chính thức.*

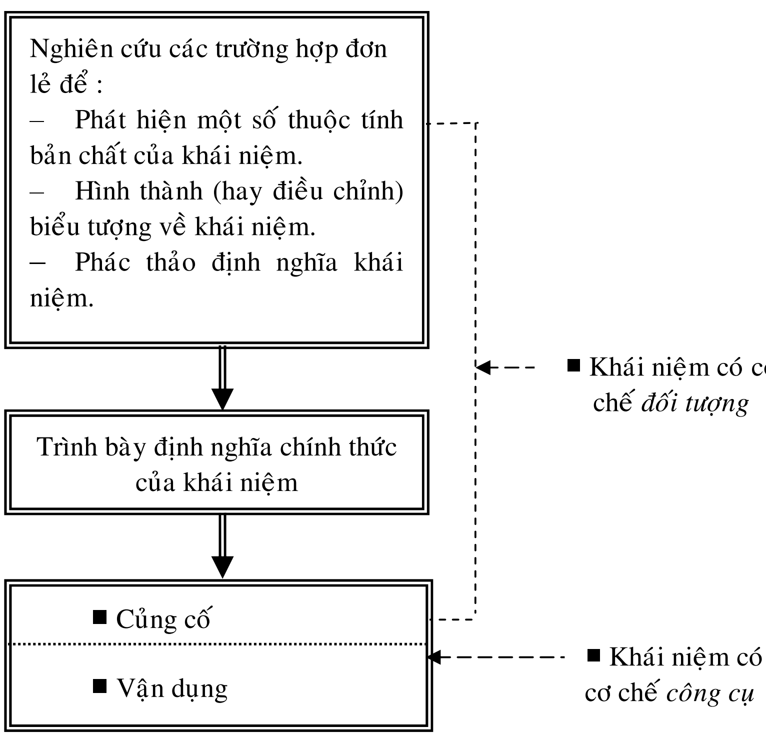
Trên cơ sở phác thảo định nghĩa của học sinh, giáo viên tổ chức cho họ tìm cách bổ sung, hoàn chỉnh, sau đó trình bày định nghĩa chính thức của khái niệm và các kí hiệu liên quan.

• *Bước 3*: *Củng cố và vận dụng khái niệm.*

Cho các ví dụ, phản ví dụ và các bài tập củng cố khái niệm. Người ta cũng có thể nghiên cứu các thuộc tính (tính chất) khác của khái niệm (thường được cho dưới dạng định lí, hệ quả, …), hay có thể đưa vào các vấn đề trong đó khái niệm được sử dụng như là công cụ để giải quyết.

■ **Sơ đồ hoá tiến trình:**

Trong tiến trình này, khái niệm xuất hiện chủ yếu như là đối tượng nghiên cứu. Nó có cơ chế công cụ chỉ ở những thời điểm mà người ta sử dụng nó như là phương tiện để giải quyết các vấn đề.



■ **Ví dụ** : Dạy học khái niệm « Hàm số liên tục tại một điểm ».

• *Bước 1:*

+ *Giải bài toán :* Cho các hàm số sau

$y = f(x) = x^2$ (1) ;

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3 & \text{nếu } x = 1 \end{cases} \qquad (2);$$

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 1 \\ 2 & \text{nếu } x < 1 \end{cases} \qquad (3)$$

Đối với mỗi hàm số đã cho, hãy :

a. Tính f(1).

b. Tính $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

c. So sánh f(1) và $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

d. Vẽ phác đồ thị của hàm số. Đồ thị này có là một đường liền nét không ?

+ *Phát hiện các thuộc tính bản chất* (hình thành biểu tượng) :

Sau khi giải bài toán trên, giáo viên cho học sinh so sánh đặc trưng của các hàm số đã nghiên cứu, và thông báo : Hàm số thứ nhất được gọi là hàm số liên tục tại điểm x = 1, các hàm số khác gọi là không liên tục tại 1 (hay gián đoạn tại 1).

Hướng dẫn học sinh nêu lên các thuộc tính bản chất của khái niệm hàm số liên tục tại điểm x = 1. Từ đó bằng khái quát hoá để có các thuộc tính bản chất của khái niệm hàm số liên tục tại điểm x = x_0 và phác thảo định nghĩa khái niệm này.

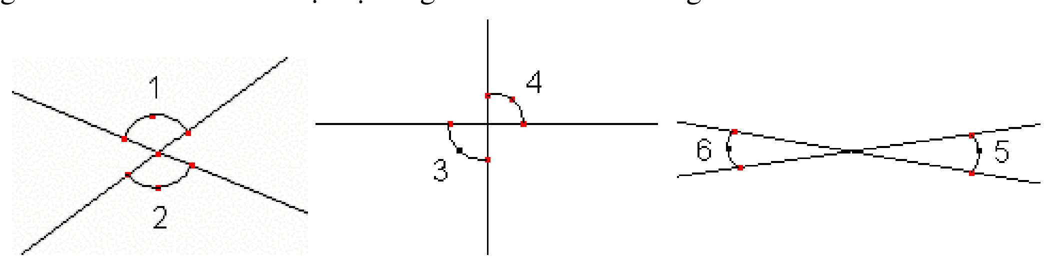
• *Bước 2* : Trình bày định nghĩa khái niệm hàm số liên tục tại x_0 dưới dạng kênh lời như trong sách giáo khoa và dưới dạng kênh hình (tóm tắt định nghĩa).

• *Bước 3* : Cho ví dụ minh hoạ, củng cố. Nghiên cứu một số định lí cho phép vận dụng khái niệm hàm số liên tục vào việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình, …

■ **Ví dụ 2** : Dạy học khái niệm « Hai góc đối đỉnh » ở lớp 7

• *Bước 1 (làm việc theo nhóm)*

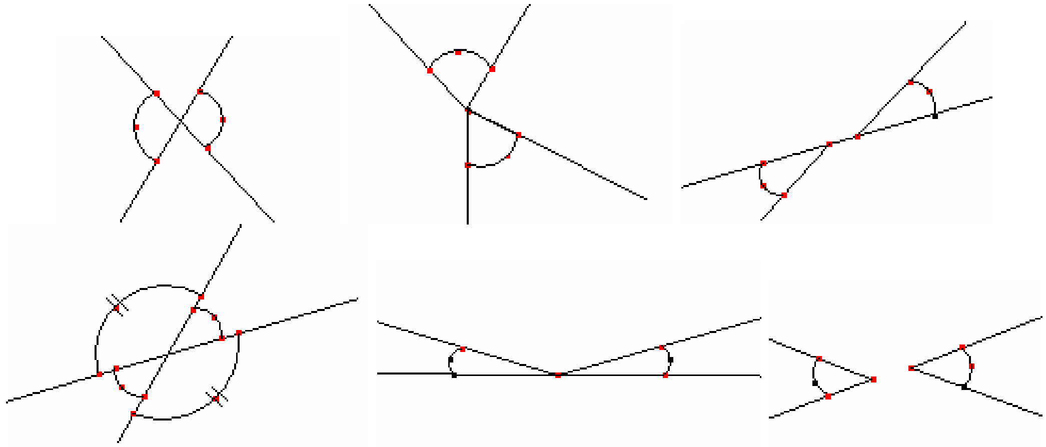
- Pha 1 : Giáo viên *thông báo* « Các cặp góc được đánh số sau đây là các góc đối đỉnh. Hãy nghiên cứu và đề xuất một định nghĩa : thế nào là hai góc đối đỉnh ? »



- Pha 2 : Giáo viên tổng hợp, phân tích câu trả lời của các nhóm và cho bài toán mới.

Bài toán : Trong các cặp góc đánh dấu sau đây, có các cặp góc là các góc đối đỉnh, nhưng cũng có các cặp góc không phải là các góc đối đỉnh. Dựa vào định nghĩa mà các em vừa cho, hãy gạch bỏ những cặp góc không phải là các góc đối đỉnh.

Nếu các em thấy định nghĩa cũ không chính xác, thì có thể cho định nghĩa mới, và dùng định nghĩa mới để làm công việc trên.



- Pha 3 : Giáo viên thu lại các câu trả lời của học sinh và cho phiếu thông báo kết quả của bài tập cho trong pha 2 (nhưng không giải thích vì sao).

- Pha 4 : Học sinh xem xét lại định nghĩa của chúng để điều chỉnh nếu thấy chưa chính xác.

- Pha 5 : Học sinh tranh luận và thống nhất một định nghĩa.

Nếu đó là định nghĩa mong đợi thì giáo viên chấp nhận

Ngược lại, giáo viên tìm cách tác động (bằng cách đưa vào các ví dụ hay phản ví dụ mới) để điều chỉnh và đi đến định nghĩa mong đợi.

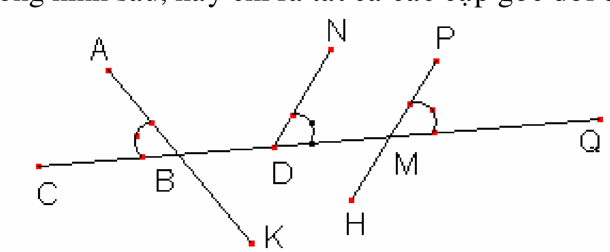
• *Bước 2* : *Nêu định nghĩa chính thức của khái niệm.*

• *Bước 3* : *Cho các ví dụ củng cố luyện tập, nghiên cứu tính chất khác, vận dụng.*

Chẳng hạn hai bài tập củng cố sau đây.

– Bài tập 1 : Vẽ góc xBy, đỉnh B, có số đo bằng 60°. Vẽ góc đối đỉnh của góc xBy. Đặt tên cho góc đó. Hỏi góc này có số đo bằng bao nhiêu độ ?

– Bài tập 2 : Trong hình sau, hãy chỉ ra tất cả các cặp góc đối đỉnh.



■ **Nghiên cứu biểu tượng ban đầu**

Thông thường trước khi học một khái niệm nào đó, người học đã có những biểu tượng ban đầu về đối tượng được phản ánh trong khái niệm này. Các biểu tượng này được hình thành qua tiếp xúc với những tình huống trong thực tế cuốc sống, hay học tập ở nhà trường, trong đó khái niệm hiện diện một cách ngầm ẩn. Chúng cũng có thể được hình thành qua các bài học chính thức về khái niệm. Chẳng hạn, trước khi dạy học khái niệm parabol ở bậc THPT, học sinh đã có những biểu tượng về parabol từ lớp 9.

Các biểu tượng ban đầu này có thể chưa đầy đủ, thậm chí sai lệch, không phù hợp với cái mà ta muốn dạy. Do đó, việc hiểu được biểu tượng ban đầu này của người học trước khi dạy học khái niệm trở nên rất quan trọng. Vì nó cho phép chúng ta lựa chọn và tổ chức một cách thích hợp quy trình dạy học khái niệm này. Nó cho phép biết được cái mà ta cần điều chỉnh, cái mà ta cần củng cố, cái ta cần bổ sung. Mặt khác, nó cho phép thích ứng ý định của người dạy vào vấn đề mà người học thực sự quan tâm.

Để có được những thông tin về biểu tượng ban đầu này, ta có thể :

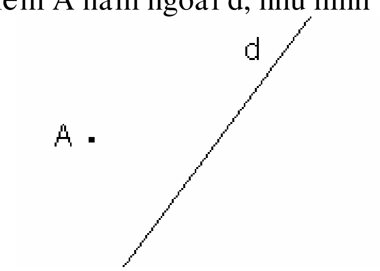
– tham khảo các công trình nghiên cứu có liên quan đến khái niệm,
– hoặc tự mình thực hiện các nghiên cứu,
– hoặc đơn giản chỉ làm một vài thử nghiệm trước khi tiến hành dạy học khái niệm, thông qua việc đề nghị học sinh giải một số bài tập, trả lời một số câu hỏi,…

Ví dụ 1 : Trước khi học khái niệm đối xứng trục ở lớp 8, mỗi học sinh đã có những biểu tượng ban đầu nào đó về khái niệm này, vì trong cuộc sống hàng ngày các em đã tiếp xúc với rất nhiều tình huống trong đó hình ảnh đối xứng trục thể hiện một cách ngầm ẩn (không định nghĩa).

Nghiên cứu của Denis Grenier (1985) đã đạt được những kết quả khá thú vị.

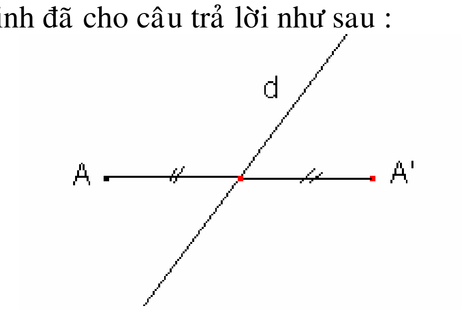
Bà đề nghị học sinh lớp 6, Cộng hoà Pháp giải bài toán sau:

«Cho đường thẳng d và điểm A nằm ngoài d, như hình vẽ sau:



Dựng điểm A’ đối xứng của điểm A qua đường thẳng d. »

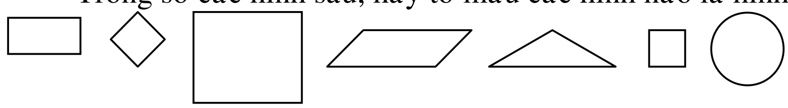
Kết quả : Nhiều học sinh đã cho câu trả lời như sau :



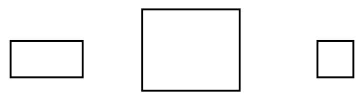
Kết quả này cho phép dự đoán một trong các nguyên nhân của biểu tượng sai lệch này về phép đối xứng trục là : Trong các tình huống đối xứng mà học sinh đã gặp, các trục đối xứng luôn nằm theo phương thẳng đứng. Do vậy, biểu tượng sai lệch trên sẽ càng được củng cố nếu trong dạy học, ta chỉ cho học sinh gặp các tình huống tương tự như vậy, nhưng nó có thể được xoá bỏ nếu giáo viên cho học sinh tiếp xúc với các tình huống rất đa dạng, trong đó trục đối xứng có thể nằm ngang, nằm theo phương thẳng đứng, hoặc nằm xiên.

Ví dụ 2: Trước khi dạy khái niệm hình vuông cho học sinh THCS, ta thực hiện một test sau đây, mà nó cho phép hiểu được phần nào biểu tượng của học sinh. (Học sinh đã tiếp xúc với hình vuông từ cấp tiểu học).

Trong số các hình sau, hãy tô màu các hình nào là hình vuông

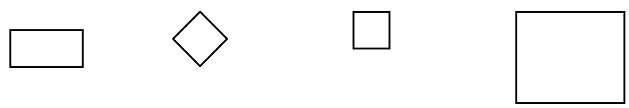


- Nếu học sinh tô màu các hình :



thì ta có thể chẩn đoán biểu tượng hình vuông ở học sinh này như sau : Đó là hình có bốn góc đều vuông, hình được đặt theo hướng ‘’thẳng”, sự bằng nhau của các cạnh là không quan trọng.

- Nếu học sinh tô màu các hình :



thì ta chẩn đoán : Đối với học sinh này, hình vuông là hình có bốn góc đều vuông.

Việc nghiên cứu các câu trả lời này cho phép giáo viên tính đến những hình sẽ đề nghị trong bước một của con đường quy nạp, sao cho nó cho phép làm thay đổi ở học sinh những biểu tượng ban đầu sai lệch và củng cố các biểu tượng đúng.

6.1.2. Con đường suy diễn (Démarche déductive)

- *Bước 1 : Phát biểu định nghĩa khái niệm.*

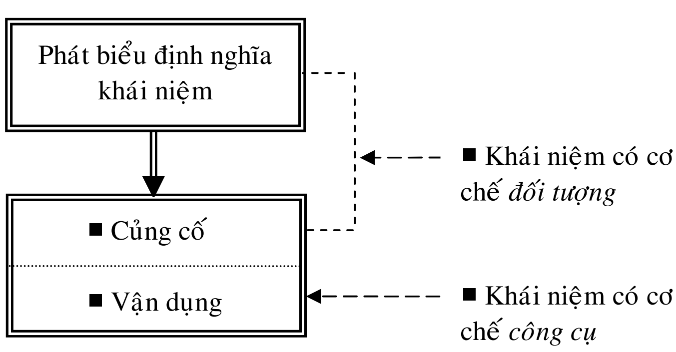
Khái niệm xuất hiện ngay từ đầu với cơ chế đối tượng.

- *Bước 2 : Củng cố và vận dụng khái niệm*

Cho các ví dụ minh hoạ (hợp thức hoá đối tượng, nghĩa là chỉ ra sự tồn tại đối tượng thoả định nghĩa) và phản ví dụ cho phép làm rõ thuộc tính bản chất của khái niệm.

Cho các bài tập củng cố hoặc đưa vào các tính chất khác của khái niệm, các bài tập vận dụng.

■ Sơ đồ hoá tiến trình



■ Chú ý : Trong cả hai con đường nêu trên của tiến trình Đối tượng→ Công cụ, khái niệm xuất hiện trước hết như đối tượng nghiên cứu, sau đó nó mới được sử dụng như là công cụ để giải quyết các vấn đề (toán học hoặc không).

Tuy nhiên, trong thực tế dạy học hiện nay, thông thường chúng ta chỉ dừng lại ở cấp độ « đối tượng », nghĩa là chỉ đi nghiên cứu và củng cố những thuộc tính của chính đối tượng, mà không cho nó cơ hội hoạt động như công cụ. Đó là một nhược điểm của cách dạy học truyền thống, và xa hơn là nhược điểm của quan điểm muốn tách rời Toán học thuần tuý và Toán học ứng dụng.

6.2. Tiến trình « Công cụ → Đối tượng → Công cụ »

Tiến trình này xuất phát từ hai quan niệm có nguồn gốc khoa học luận :

– Trong lịch sử nảy sinh và phát triển của các đối tượng toán học, hầu hết các khái niệm đều xuất hiện trước hết trong cơ chế công cụ ngầm ẩn sau đó chúng mới có cơ chế đối tượng (được định nghĩa, được nghiên cứu các tính chất, …). Khi đã có vị trí chính thức của một khái niệm toán học nó lại được sử dụng để giải quyết các vấn đề khác (cơ chế công cụ tường minh).

– Trong toán học, « **Bài toán** », « **Ý tưởng** » và « **Công cụ** » hình thành nên ba thành phần chủ yếu của hoạt động toán học, trong đó : Bài toán là động cơ của hoạt động, Công cụ là phương tiện giải quyết vấn đề, Ý tưởng là trung gian giữa Bài toán và Công cụ. Trong mối quan hệ này, Bài toán cần giải quyết đóng vai trò mấu chốt và Công cụ chính là mầm mống của đối tượng tri thức mới.

■ **Các giai đoạn chủ yếu của tiến trình « Công cụ → Đối tượng → Công cụ »**

Trong việc dạy học khái niệm, hai quan điểm trên được thể hiện qua các giai đoạn sau đây:

• *Giai đoạn «Công cụ ngầm ẩn» : Giải các bài toán*

Trong giai đoạn này, vấn đề là phát hiện và trình bày các bài toán cần giải quyết, khám phá *ý tưởng* giải, từ đó xây dựng *công cụ* giải quyết bài toán và tiến hành giải.

Khái niệm sẽ xuất hiện một cách ngầm ẩn trong giai đoạn này như là công cụ giải các bài toán. Nói cách khác nó thường xuất hiện như một khái niệm tiền toán học (protomathématique: chưa có tên, chưa có định nghĩa).

• *Giai đoạn đối tượng:*

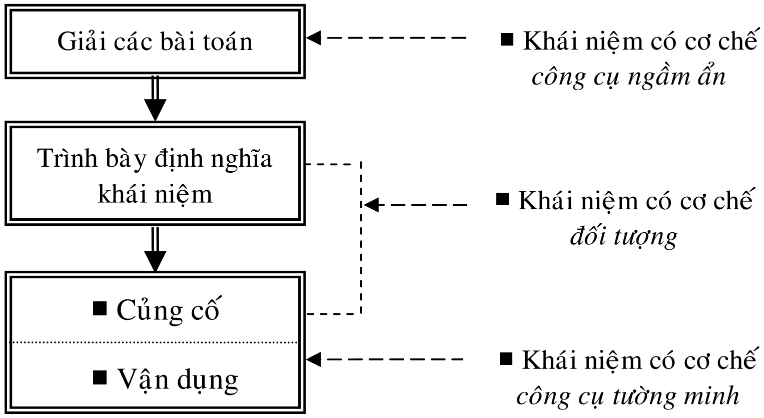
Nêu tên và định nghĩa khái niệm; nghiên cứu các thuộc tính, các tính chất cơ bản của khái niệm; hoạt động củng cố bước đầu khái niệm.

Trong giai đoạn này, ta có một khái niệm toán học (đã có tên, có định nghĩa), nó có cơ chế Đối tượng.

• *Giai đoạn "công cụ tường minh":*

Sử dụng khái niệm như là công cụ để giải quyết các bài toán khác nhau. Nhưng khác với giai đoạn 1, bây giờ, nó hoạt động như một công cụ rõ ràng.

■ **Sơ đồ hoá tiến trình:**

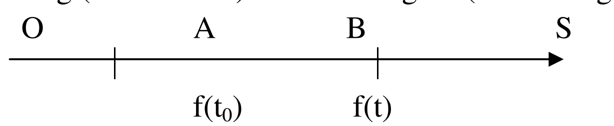


■ **Ví dụ 1** : Dạy học khái niệm Đạo hàm của hàm số.

• *B1. Giai đoạn công cụ ngầm ẩn: Giải các bài toán.*

1) Vận tốc trung bình (nhắc lại)

Một chất điểm chuyển động thẳng trên trục OS có phương trình là : S = f(t), trong đó S là quãng đường (tính theo m) và t là thời gian (tính theo giây).



$V_{ttb.t} = \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ là vận tốc trung bình – đại lượng biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động trong khoảng thời gian giữa t_0 và t (hay trên quãng đường giữa A và B).

• Câu hỏi gợi vấn đề:

Đại lượng nào biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại chính thời điểm t_0?

2) Bài toán vận tốc tức thời.

• *Bài toán* : Một chất điểm chuyển động thẳng trên trục OS có phương trình là: S = f(t) Tìm đại lượng biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại chính thời điểm t_0.

• *Ý tưởng*:

+ Nếu khoảng thời gian giữa t và t_0 càng bé thì $v_{ttb.t} = \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ càng biểu thị trung thực hơn độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0.

+ $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ (nếu có) chính là đại lượng biểu thị chính xác nhất độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0.

• *Công cụ*: Như vậy, đại lượng $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ trở thành công cụ cho phép xác định độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0. Đại lượng này được gọi là « Vận tốc tức thời » của chuyển động tại thời điểm t_0 (một khái niệm mới ra đời). Điều này dẫn tới định nghĩa sau:

Định nghĩa: $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ (nếu có) được gọi là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0, kí hiệu $V_{TT}(t_0)$.

Như vậy: $V_{TT}(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

Ví dụ: Cho chất điểm chuyển động thẳng có phương trình là $S = f(t) = t^2 - t$

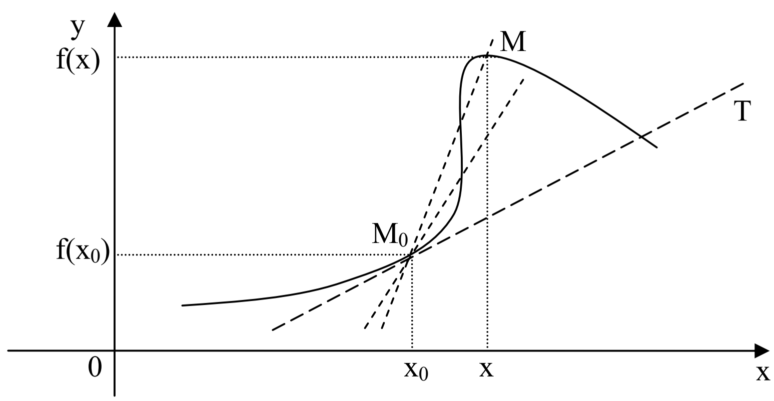
a) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ $t_0 = 3s$ đến $t_1 = 3{,}1s$
b) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ $t_0 = 3s$ đến $t_1 = 3{,}01s$
c) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 3$ (s). So sánh với hai vận tốc trung bình trước.

3) Bài toán tiếp tuyến của đường cong.

3.1) Định nghĩa

Cho đường cong phẳng (C). M_0 là một điểm cố định trên (C). M là điểm di động trên (C).

– Đường thẳng MM_0 gọi là cát tuyến của (C).
– Khi M di chuyển trên (C) về M_0, nếu cát tuyến MM_0 tiến tới một vị trí giới hạn M_0T, thì M_0T được gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại M_0. M_0 gọi là tiếp điểm.



- *Câu hỏi gợi vấn đề* : làm sao xác định được tiếp tuyến này?

3.2) Hệ số góc của đường thẳng.

- Nhắc lại : Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng d có phương trình y = ax + b. Khi đó số a được gọi là hệ số góc của đường thẳng d. Người ta chứng minh được a = tgφ, trong đó φ là góc hợp bởi đường thẳng d với chiều dương của trục hoành.

- Chú ý : một đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và hệ số góc. Như vậy, tiếp tuyến tại M_0 hoàn toàn xác định khi biết hệ số góc của nó.

3.3) Hệ số góc của tiếp tuyến.

- *Bài toán* : Xác định hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong (C) phương trình y = f(x).

- *Ý tưởng* : Đường cong (C) có phương trình là : y = f(x).

M_0 nằm trên (C) $\Rightarrow M_0(x_0 ; y_0)$ với $y_0 = f(x_0)$.

M di động trên (C) $\Rightarrow$ M(x ; y) với y = f(x).

Khi M $\to M_0 \Rightarrow$ Hệ số góc của cát tuyến $MM_0 \to$ hệ số góc của tiếp tuyến MT.

Hệ số góc của MM_0 là : $\text{tg}\varphi = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Vậy hệ số góc k của tiếp tuyến là : $k = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

- *Công cụ* : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ là công cụ cho phép tìm hệ số góc của tiếp tuyến.

Ví dụ : Cho đường cong (C) có phương trình y = f(x) = x^2.

a) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm M_0 có hoành độ $x_0 = 0$.

b) Xác định tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 có hoành độ $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Vẽ tiếp tuyến này.

<u>Giải</u> : b) $k = \text{tg}\varphi = \lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{2}} \dfrac{x^2-\frac{3}{4}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$;

$k = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg}\varphi == \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^0$.

Phương trình tiếp tuyến (phương trình đường thẳng qua M_0 và có hệ số góc k) là

$$y = \sqrt{3}\,(x-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4}.$$

■ *B2. Giai đoạn đối tượng.*

• Nhận xét và nêu khái niệm : Giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ là một công cụ cho phép giải quyết rất hiệu quả các bài toán không chỉ trong toán học (xác định tiếp tuyến, …), trong vật lí (vận tốc tức thời, gia tốc, …), mà trong nhiều ngành khoa học khác, chẳng hạn trong hoá học (nhiệt dung …). Chính tầm quan trọng của nó, mà các nhà bác học đã gán cho giới hạn này một cái tên : Đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0.

• Nêu định nghĩa, tính chất của đạo hàm, các quy tắc tính đạo hàm, các bài tập về tính đạo hàm của các hàm số.

(Như vậy, khái niệm đạo hàm nảy sinh từ sự khái quát hoá các giới hạn dạng $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$).

■ *B3. Giai đoạn tác động như « công cụ tường minh »* : Ứng dụng của đạo hàm trong khảo sát hàm số, trong giải gần đúng phương trình, trong giải quyết các bài toán của vật lí, …

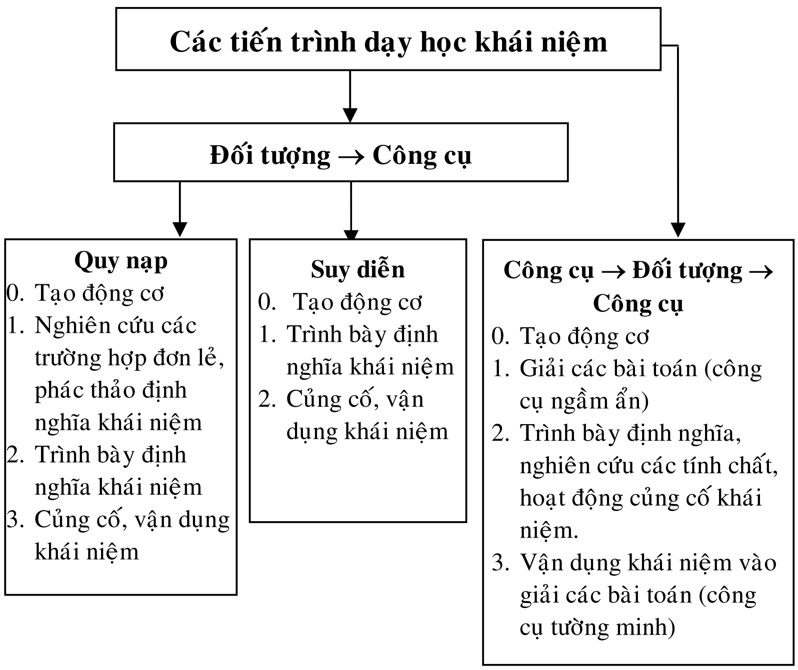
Chú ý : Trong thực tế, các giai đoạn trên không phải luôn luôn được trình bày một cách liên tục và tuyến tính. Một số pha của giai đoạn 2 và 3 có thể xen kẽ vào nhau, chứ không phải luôn luôn tồn tại độc lập. Đôi khi chúng xuất hiện ở những phần khác nhau, ở những cấp độ khác nhau.

6.3. Tổng kết và nhận xét về các tiến trình dạy học các khái niệm toán học

■ **Tạo động cơ mở đầu** [14]

Học sinh chỉ học tập một cách tự giác và tích cực, khi họ cảm thấy có nhu cầu và hứng thú giải quyết các vấn đề đặt ra.

Để làm được điều đó, cần làm cho họ thấy rằng mình đang thực sự *thiếu hụt kiến thức*, thấy được *vai trò, ý nghĩa và lợi ích* của những hoạt động mà họ sắp tiến hành hay của đối tượng kiến thức mới mà họ sắp lĩnh hội. Cảm giác thiếu hụt kiến thức cùng với niềm tin vào lợi ích mà kiến thức mới có thể mang lại sẽ là yếu tố kích thích, gợi ra ở học sinh động cơ, nhu cầu, hứng thú giải quyết vấn đề hay tham gia vào hoạt động giải quyết vấn đề của giáo viên. Đó chính là bước « Tạo động cơ mở đầu» (bước 0).



Tạo động cơ như vậy nhằm tới làm cho những mục tiêu sư phạm của giáo viên biến thành mục tiêu của cá nhân học sinh.

Trong một tiến trình dạy học khái niệm, ta thường bổ sung thêm bước « Tạo động cơ mở đầu » như vậy.

Ví dụ 1 : Có thể tạo động cơ cho việc dạy học khái niệm cấp số nhân bằng cách xuất phát từ bài toán thực tế sau đây.

« Một ngân hàng quy định như sau về việc gửi tiền tiết kiệm kì hạn một tháng :

– Lãi suất kì hạn một tháng là 0,4%.
– Khi kết thúc kì hạn gửi tiền mà người gửi không đến rút tiền thì toàn bộ số tiền (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sẽ được chuyển gửi tiếp cho kì hạn một tháng tiếp theo.

Em hãy giúp ngân hàng này bằng cách tìm một công thức cho phép nhân viên của họ tính thật nhanh tổng số tiền (bao gồm cả vốn lẫn lãi) cần trả cho một khách hàng bất kì, biết rằng :

[14] Tham khảo chi tiết khái niệm « Gợi động cơ » trong Nguyễn Bá Kim (2004).

– Khởi đầu khách hàng này gửi vào số tiền là **N** đồng.

– Khách hàng đã gửi trong thời gian **n** tháng.

– Kể từ ngày gửi cho đến tháng thứ **n** này, đây là lần đầu tiên khách hàng tới rút tiền.”

Bài toán này không chỉ cho phép tạo động cơ đưa vào khái niệm cấp số nhân, mà còn cả định lí về tổng n số hạng đầu tiên của nó, dù rằng ở thời điểm tạo động cơ học sinh chưa thể giải ngay được bài toán.

Ví dụ 2: Dùng các nghịch lí để tạo động cơ đi vào nghiên cứu khái niệm giới hạn (Tham khảo Lê Văn Tiến, 2001).

■ **Nhận xét:**

a) Tiến trình Đối tượng → Công cụ.

• Con đường quy nạp

Ưu điểm : Trực quan, phù hợp với con đường nhận thức : “Từ trực quan sinh động, đến tư duy trừu tượng và từ tư duy trừu tượng đến thực tiễn, đó là con đường nhận thức chân lí”. Do đó dễ hiểu hơn đối với học sinh. Cho phép rèn luyện các thao tác tư duy (phân tích, so sánh, tổng hợp, khái quát hoá, trừu tượng hoá, …), phát triển khả năng quan sát. Phù hợp với đối tượng học sinh trung bình, yếu. Nếu tổ chức tốt, dễ phát huy tính tích cực hoạt động của học sinh.

Khuyết điểm : tốn nhiều thời gian.

• Con đường suy diễn

Ưu điểm : Ngắn gọn, rõ ràng, sáng sủa và tiết kiệm thời gian. Giáo viên dễ làm chủ tiến trình dạy học.

Khuyết điểm : Khái niệm được trình bày dưới hình thức phi hoàn cảnh hoá, phi cá nhân hoá, phi thời gian hoá. Do đó, nó chỉ mang nghĩa hình thức. Học sinh không thấy được nguồn gốc nảy sinh và hình thành khái niệm. Khó hiểu đối với học sinh trung bình và yếu. Khó phát huy được tính tích cực hoạt động và tính sáng tạo của học sinh. Khó có điều kiện phát triển các năng lực trí tuệ chung như phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hoá, …

b) Tiến trình Công cụ → Đối tượng → Công cụ

Ưu điểm : Học sinh thấy được con đường và lý do nảy sinh của khái niệm. Do đó họ có hứng thú hơn trong học tập và dễ dàng nắm được nghĩa của khái niệm. Hiểu sâu hơn bản chất của khái niệm. Có nhiều khả năng phát triển năng lực và phẩm chất tư duy. Phù hợp với mọi đối tượng học sinh. Đặc biệt, nếu các bài toán, các tình huống được chọn và tổ chức dạy học mô phỏng được phần nào lịch sử, nghĩa là phản ánh được phần nào con đường nảy sinh và phát triển của khái niệm trong lịch sử, thì điều này tạo thuận lợi cho việc hình thành thế giới quan duy vật biện chứng ở người học. Có điều kiện phát triển các năng lực và phẩm chất tư duy: Tích cực, độc lập, sáng tạo …

Khuyết điểm: tốn nhiều thời gian, công sức của thầy và trò.

■ Lưu ý: Trong thực tế, không phải lúc nào cũng chỉ dùng độc nhất một tiến trình dạy học các khái niệm. Mà cần có sự kết hợp hài hoà giữa ba tiến trình. Việc dùng một tiến trình nào đó phụ thuộc vào nhiều yếu tố : trình độ học sinh, điều kiện thời gian, đặc trưng của khái niệm, …

7. Hoạt động củng cố bước đầu khái niệm

Việc củng cố khái niệm là một quá trình lâu dài, có thể trải qua nhiều giai đoạn, cấp độ khác nhau, kể cả khi định nghĩa khái niệm và khi vận dụng khái niệm như là công cụ (ngầm ẩn hay tường minh) để giải quyết các vấn đề khác.

Tuy nhiên, ngay sau khi đưa vào định nghĩa khái niệm, rất cần thiết giúp học sinh củng cố bước đầu khái niệm bằng cách cho họ tập luyện một số trong các hoạt động sau đây:

– Phân tích các thuộc tính bản chất của khái niệm.

– Nhận dạng và thể hiện khái niệm.

– Xây dựng thuật toán (algorithme) nhận dạng khái niệm …

Các hoạt động này liên quan mật thiết với nhau, hỗ trợ nhau và có thể xen kẽ nhau.

a) Phân tích các thuộc tính bản chất và thuộc tính đặc trưng của khái niệm

Trước khi dạy học một khái niệm, giáo viên cần nghiên cứu cấu trúc logic của định nghĩa để hiểu được các thuộc tính bản chất và đặc trưng của khái niệm. Từ đó có biện pháp thích hợp làm cho học sinh nắm vững các thuộc tính này bằng nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn,

– Đọc lại nhiều lần định nghĩa,

– Nêu tách bạch từng thuộc tính bản chất của khái niệm, thể hiện trong định nghĩa,

– Viết định nghĩa dưới dạng kênh hình, …

b) Hoạt động nhận dạng và hoạt động thể hiện khái niệm

• Nhận dạng một khái niệm là kiểm tra xem một đối tượng đã cho có thuộc tính đặc trưng của khái niệm đó không ?

Trong hoạt động này, giáo viên nên đưa ra các ví dụ và phản ví dụ rất đa dạng. Đặc biệt, các phản ví dụ đóng một vai trò rất quan trọng cho phép nắm vững hơn các thuộc tính bản chất và thuộc tính đặc trưng của khái niệm.

• Thể hiện một khái niệm là tạo ra các đối tượng có thuộc tính đặc trưng được phản ánh trong khái niệm.

Ví dụ : Xét các khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ.

– Hoạt động nhận dạng :

"*Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn, hàm số nào là hàm số lẻ :*

(1) $y = lg(x + \sqrt{x^2+1})$ *(2)* $y = sinx - cosx$

(3) $y = -x\sqrt{x^2} + x^5$ *(4)* $y = \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x^4-1}$

(5) $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+4x+4}}{|x+2|}$ ".

– Hoạt động thể hiện :

Cho ví dụ về một hàm số lẻ, một hàm số chẵn và một hàm số không chẵn không lẻ.

Như vậy, nhận dạng và thể hiện là hai kiểu hoạt động trái ngược nhau. Nhưng liên quan mật thiết với nhau và thường lồng vào nhau. Hoạt động "thể hiện" một khái niệm đã bao hàm trong đó hoạt động "nhận dạng" với tư cách là hoạt động kiểm tra. Chẳng hạn trong ví dụ nêu trên, trước khi trình bày chính thức một ví dụ về hàm số lẻ (thể hiện), ta phải kiểm tra lại xem hàm số vừa đưa ra có thoả mãn các tính chất đặc trưng của hàm số lẻ không (nhận dạng).

c) Xây dựng thuật toán (algorithme)[15] nhận dạng khái niệm

Hai trong các lợi ích của việc xây dựng và vận dụng thuật toán nhận dạng khái niệm là :

– Cho phép học sinh nắm vững hơn các thuộc tính bản chất và thuộc tính đặc trưng của khái niệm.

– Góp phần hình thành và phát triển tư duy thuật toán, văn hoá thuật toán.

Thuật toán này có thể được mô tả bằng lời, bằng cách nêu lên và nhấn mạnh các việc cần thực hiện, thứ tự thực hiện để nhận dạng một khái niệm. Trong trường hợp có đủ thời gian và cơ hội, có thể trình bày nó dưới dạng tường minh hơn, như trong ví dụ sau.

Ví dụ: Thuật toán nhận biết khái niệm hàm số liên tục tại một điểm.

■ Cho dưới hình thức ngôn ngữ tự nhiên (bảng chỉ dẫn các bước cần thực hiện) :

* Bước 1 : Xét xem $y = f(x)$ có xác định tại x_0 không.

– Nếu không, kết luận $f(x)$ không liên tục tại x_0.

– Nếu có, tính $f(x_0)$ và đi tiếp bước 2.

* Bước 2 : Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

– Nếu không tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, kết luận $f(x)$ không liên tục tại x_0.

– Nếu có, đi tiếp bước 3.

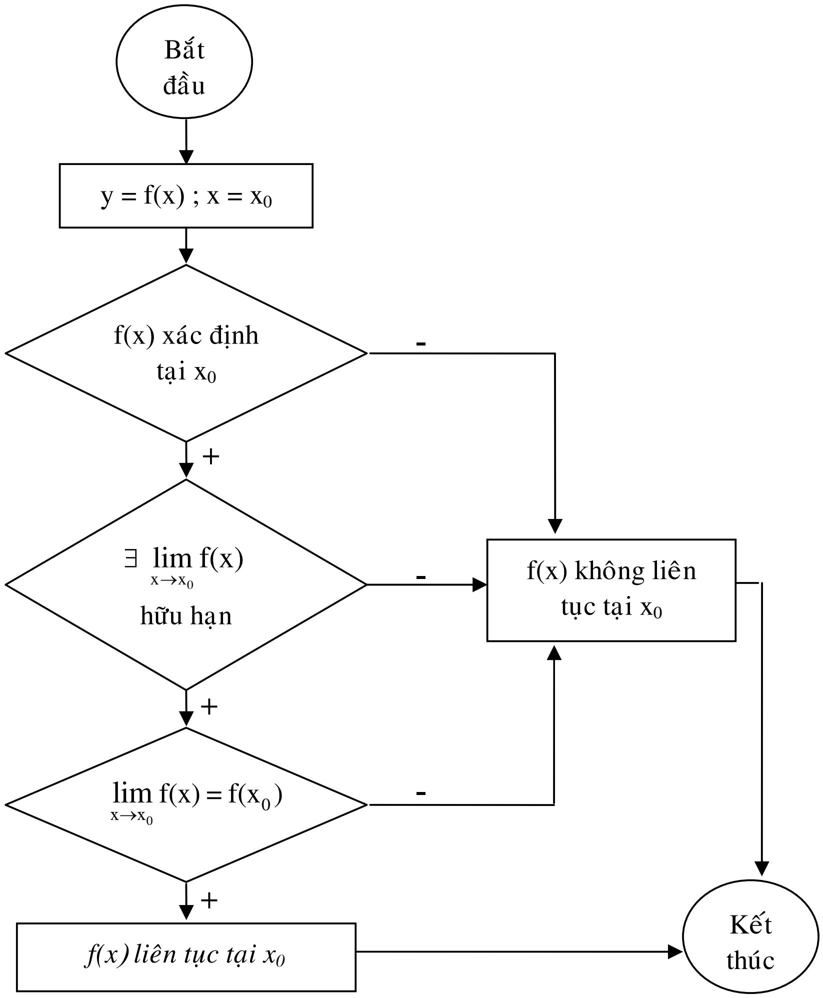
* Bước 3 : Xét xem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$?

– Nếu không, kết luận $f(x)$ không liên tục tại x_0.

– Nếu có, kết luận $f(x)$ liên tục tại x_0.

■ Cho dưới dạng sơ đồ khối.

[15] Ở đây, từ "Thuật toán" được hiểu theo nghĩa rộng (tham khảo phần C, chương 4)..



8. Dạy học phân chia và hệ thống hoá khái niệm

8.1. Phân chia khái niệm là gì ?

Ta nói một khái niệm có ngoại diên A được phân chia thành các khái niệm chủng có ngoại diên tương ứng là A_1, A_2,… A_n khi các điều kiện sau được thoả mãn :

– $A_i \neq \phi$, i = 1, 2, … , n.

– $A_i \cap A_j = \phi$ nếu $i \neq j$.

– $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

Bất cứ một sự phân chia nào cũng phải dựa trên một tiêu chuẩn (dấu hiệu) thống nhất. Nói cách khác phải có cơ sở để phân chia.

Ví dụ :

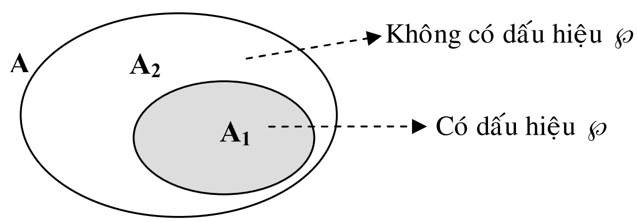
– Nếu dựa trên dấu hiệu "có ít nhất hai cạch song song với nhau" thì khái niệm tứ

giác lồi được phân chia thành hai loại khác nhau : Hình thang và những tứ giác lồi không là hình thang.

– Khi ta nói, hàm số có hai loại : Hàm số chẵn và hàm số không chẵn (trên miền xác định của nó), thì ta đã thực hiện phân chia khái niệm hàm số theo tiêu chuẩn "tính chẵn của hàm số trên miền xác định của nó".
  Ta không thể phân chia lớp các hàm số thành hàm số chẵn và hàm số lẻ (dựa vào tính chẵn hay lẻ của hàm số), vì phân chia này vi phạm cả điều kiện 3 và điều kiện 2. Quả thực, có những hàm số không chẵn không lẻ và có những hàm số vừa chẵn lại vừa lẻ.

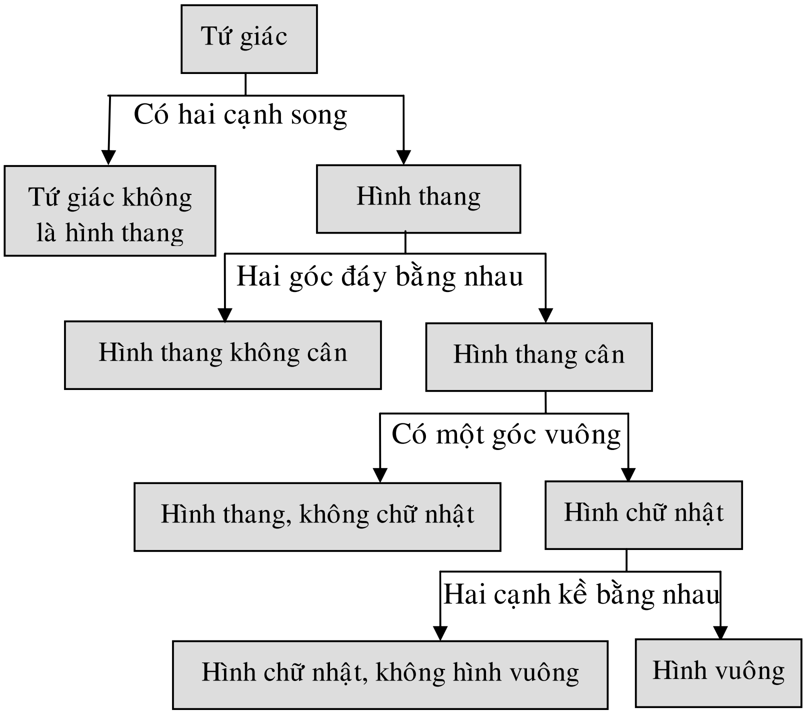
– Phương trình đa thức một ẩn có thể phân chia thành: Phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai, phương trình bậc 3, … Tiêu chuẩn của phân chia này là "Luỹ thừa cao nhất của ẩn số".

Phân chia một khái niệm thường được thực hiện theo hình thức nhị phân (phép nhị phân). Cụ thể, dựa vào dấu hiệu $\wp$, theo phép nhị phân một khái niệm A được phân chia thành hai khái niệm chủng có ngoại diện A_1, A_2 thoả mãn 3 điều kiện đã nêu ở trên (ta nói, hai khái niệm chủng có quan hệ mâu thuẫn nhau). Một khái niệm chủng có thuộc tính $\wp$, khái niệm thứ hai không có thuộc tính này (xem hình dưới đây). Chẳng hạn, trong ví dụ trên, chỉ hai trường hợp đầu là được phân chia theo phép nhị phân.



Nếu thực hiện liên tiếp nhiều phép phân chia khái niệm, ta sẽ có một hệ thống các phân chia. Hệ thống này mô tả mối quan hệ chủng loại giữa nhiều khái niệm khác nhau.

Ví dụ : Sơ đồ sau minh hoạ một hệ thống phân chia theo phép nhị phân (dòng chữ nằm ngoài ô chỉ dấu hiệu phân chia tương ứng).



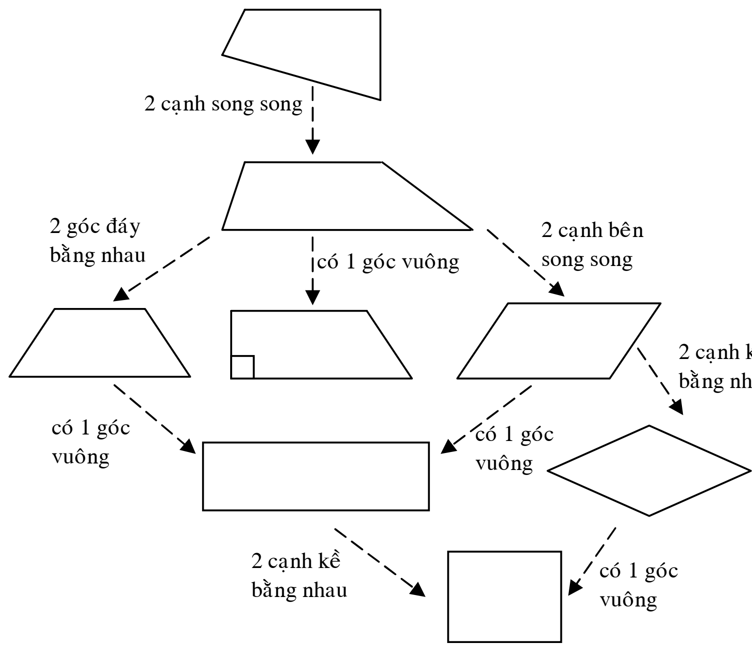
Chú ý rằng việc phân chia theo phép nhị phân dẫn đến hai khái niệm chủng có quan hệ mâu thuẫn nhau, nhưng thông thường ta chỉ quan tâm nghiên cứu một trong chúng (chẳng hạn, trong sơ đồ trên hình thang được phân chia thành hình thang cân và hình thang không cân, nhưng ta chú trọng vào hình thang cân). Mỗi khái niệm chủng này, đến lượt nó lại có thể có những phân chia khác nhau. Nói cách khác, ta có thể thực hiện một phân chia "đa giai đoạn". Kết quả là tạo nên một họ các khái niệm.

Mặt khác, một khái niệm có thể được phân chia theo nhiều tiêu chuẩn khác nhau.

Vì vậy, trong dạy học, để học sinh nắm được quan hệ giữa các khái niệm, ta thường hệ thống hoá quan hệ chủng – loại giữa chúng theo một cấu trúc "đa giai đoạn". Trong đó, với mỗi bước phân chia theo phép nhị phân, ta chỉ trình bày một khái niệm chủng, khái niệm thứ hai là ngầm ẩn. Điều này cho phép đơn giản hoá cấu trúc phân chia và do đó làm rõ hơn quan hệ giữa các khái niệm đã được học.

Thực hiện một sự phân chia đa giai đoạn như vậy chính là hoạt động **hệ thống hoá các khái niệm**.

Ví dụ : Sơ đồ sau (Hình học 8, NXB GD 1999, tr. 51) thể hiện một hệ thống phân loại đa giai đoạn.



Ghi chú: Các dòng chữ đi kèm chỉ dấu hiệu phân chia tương ứng.

8.2. Vai trò của dạy học phân chia khái niệm

Dạy học phân chia khái niệm không chỉ là giới thiệu cho học sinh những hệ thống phân chia đã có sẵn, dù rằng hiểu và nhớ được hệ thống phân chia này sẽ góp phần hiểu và nắm vững hơn các khái niệm có liên quan. Vấn đề cốt yếu là tổ chức cho học sinh tiến hành chính hoạt động phân chia này, không chỉ khi ôn tập một chương, ôn tập một phần, mà với mọi cơ hội có thể. Chẳng hạn, nhân dạy học một khái niệm mới nào đó, ta có thể định vị nó so với một số khái niệm đã học trước đó.

• Nhiều công trình nghiên cứu đã chứng tỏ rằng việc nắm vững định nghĩa của một khái niệm không đủ cho phép nắm vững khái niệm đó. Người ta chỉ có thể hiểu đúng bản chất của khái niệm khi nắm vững hoạt động của nó, bao hàm đồng thời cách đưa khái niệm vào một phạm vi nào đó, hình thức thể hiện và cách tổ chức của khái niệm trong phạm vi này, đặc biệt là cách sử dụng khái niệm như là công cụ giải quyết các bài toán và cách tác động của khái niệm với các khái niệm khác không chỉ trong phạm vi đang xem xét, mà cả trong các phạm vi khác.

Như vậy, việc dạy học một khái niệm toán học bao hàm cả việc làm rõ mối quan hệ của nó với các khái niệm khác, trước hết là các khái niệm có quan hệ chủng - loại và thuộc phạm vi toán học. Điều này cho phép làm sáng tỏ hơn nội hàm và ngoại diện của khái niệm đang xem xét.

Chính trên quan điểm này mà phân chia khái niệm là một trong các hoạt động cho phép làm rõ hơn các mối quan hệ giữa các khái niệm có quan hệ chủng – loại như vậy. Ngoài ra, nó cũng cho phép phát triển tư duy logic cho học sinh.

• Nắm vững cách phân chia khái niệm cũng giúp cho việc giải các bài toán dựng hình, bài toán quỹ tích, bài toán biện luận theo tham số, bài toán chứng minh bằng phản chứng,… một cách chính xác và đầy đủ, không bỏ sót trường hợp.

Câu hỏi và bài tập

1. Khái niệm « Ôtô » là:

a) Bản thân từ Ôtô.

b) Định nghĩa của từ Ôtô.

c) Tập hợp tất cả các Ôtô tồn tại trên thế giới.

d) Tập hợp tất cả các thuộc tính mà tất cả các Ôtô đều có.

e) Tư tưởng về Ôtô mà một người nào đó có trong đầu của mình.

f) Tư tưởng chung về một lớp các đối tượng có tên Ôtô.

g) Bản thân chiếc Ôtô.

Hãy chọn câu trả lời thích hợp.

2. Phân tích các ý kiến sau đây :

– Thuộc tính bản chất của một khái niệm là một phần của thuộc tính đặc trưng của khái niệm đó.

– Một khái niệm có thể có nhiều thuộc tính đặc trưng khác nhau.

– Có thể liệt kê hết tất cả các thuộc tính bản chất của một khái niệm.

3. Lấy ví dụ về khái niệm toán học để minh hoạ khẳng định : Nội hàm càng rộng thì ngoại diên càng hẹp, nội hàm càng hẹp thì ngoại diện càng rộng.

4. Viết cấu trúc logic của định nghĩa các khái niệm sau : Cấp số cộng, Hàm số chẫn lẻ, Hai đường thẳng chéo nhau.

5. Việc nắm vững cấu trúc logic của một khái niệm có lợi ích gì cho việc dạy học khái niệm đó ?

6. Khi giải bài tập :

«Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{nếu } x \neq 4 \\ 8 & \text{nếu } x = 4 \end{cases}$ trên miền xác định của nó. »

thì khái niệm Hàm số liên tục tại một điểm hoạt động với cơ chế công cụ hay đối tượng ?

7. Cho một tình huống trong đó có một khái niệm toán học hoạt động với cơ chế công cụ.

8. Cho ví dụ về các hình thức thể hiện khác nhau của khái niệm.

9. Trình bày những khác biệt cơ bản nhất giữa tiến trình Đối tượng $\rightarrow$ Công cụ và tiến trình Công cụ $\rightarrow$ Đối tượng $\rightarrow$ Công cụ.

10. Vì sao trong bước 1 « Giải các bài toán và phác thảo định nghĩa » của con đường quy nạp, khái niệm lại hoạt động với cơ chế đối tượng?

11. Trình bày vai trò của giáo viên và học sinh trong bước 1 « Giải các bài toán và phác thảo định nghĩa » của con đường quy nạp.

12. Phân tích ý kiến cho rằng có thể tiến hành dạy học một khái niệm toán học theo cùng một con đường (quy nạp hoặc suy diễn) nhưng có thể có nhiều lựa chọn phương pháp dạy học khác nhau.

13. Nêu khái niệm có đồng nghĩa với trình bày định nghĩa khái niệm hay không?

14. Trình bày vai trò và ý nghĩa của việc nghiên cứu biểu tượng của học sinh trước khi dạy

học một khái niệm.

15. Lấy ví dụ minh hoạ để chỉ rõ rằng dù chưa được học về một khái niệm nào đó, nhưng học sinh đã có những biểu tượng ban đầu về nó.

16. Từ góc độ của phương pháp dạy học tích cực, hãy phân tích các tiến trình và con đường dạy học khái niệm toán học. (trong điều kiện nào, với phương pháp dạy học nào, … thì việc áp dụng tiến trình này mới thể hiện tinh thần của dạy học tích cực ?).

17. Xây dựng một phương án dạy học các khái niệm sau đây:

- Cấp số cộng; Hàm số liên tục tại một điểm; Giới hạn của hàm số (Đại số và giải tích 11).
- Hàm số; Hàm số chẵn và hàm số lẻ; Phương trình hệ quả (Đại số 10).
- Hai vectơ bằng nhau (Hình học 10).
- Hai đường thẳng song song và hai đường thẳng chéo nhau trong không gian; Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Hình học 11).
- Parabol (Hình học 12).

18. Phân biệt hoạt động củng cố khái niệm và hoạt động vận dụng khái niệm.

19. Phân tích ý kiến cho rằng hoạt động thể hiện một khái niệm đã bao hàm trong nó hoạt động nhận dạng khái niệm.

20. Một sinh viên cho algorithme nhận biết khái niệm hàm số lẻ như sau:

B1) Tìm miền xác định D

B2) Nếu $\forall x \in D$ mà $-x \in D$, thì qua bước 3

Nếu $\forall x \in D$ mà $-x \notin D$, thì kết luận f(x) không là hàm số lẻ.

B3) Nếu $f(-x) = -f(x)$ với $\forall x \in D$, thì f(x) là hàm số lẻ

Nếu $f(-x) \neq -f(x)$ với $\forall x \in D$, thì f(x) không là hàm số lẻ."

Hãy phân tích phương án trên của sinh viên.

21. Phân tích sự khác biệt và sự tương đồng giữa hoạt động tạo động cơ và hoạt động tạo tình huống gợi vấn đề trong dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề.

22. Cho ví dụ về một bài toán (dựng hình, quỹ tích, chứng minh phản chứng hay biện luận, …) mà việc không nắm vững cách phân chia khái niệm sẽ dẫn đến sai lầm trong bài giải.

23. Hệ thống hoá các phép biến hình trong chương trình toán phổ thông.

24. Cho một hệ thống phân loại khái niệm số trong chương trình toán phổ thông.

B. Dạy học định lí toán học

1. Định lí là gì ?

Trên phương diện tri thức khoa học, định lí được hiểu là :

- "*Một mệnh đề toán học, mà chân lí của nó được khẳng định hay phủ định qua chứng minh.*" (Từ điển toán học, NXB Khoa học và Kỹ thuật 1993).
- "*Mệnh đề toán học đã được chứng minh.*" (Le Petit Larousse, NXB Larousse – Bordas 1999).

Khác với cấp độ tri thức khoa học, trong dạy học toán ở trường phổ thông, định lí được hiểu là một mệnh đề đã được chứng minh là đúng.

Ở bậc THCS, một mặt vì khái niệm chứng minh xuất hiện sau khái niệm định lí, mặt khác vì ràng buộc của phát triển tâm lí lứa tuổi ở học sinh mà khái niệm định lí thường được đưa vào theo kiểu phô bày (par ostension), chẳng hạn :

- "*Tính chất "Khoảng cách từ trung điểm của đoạn thẳng đến mỗi đầu đoạn thẳng bằng nửa độ dài đoạn thẳng đó" được khẳng định là đúng, không phải bằng đo đạc trực tiếp mà bằng suy luận. Một tính chất như thế gọi là định lí*" (Hình học 7, NXB GD 1987).

- "*Tính chất "Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau" được khẳng định là đúng trong mọi trường hợp. Để có một khẳng định như vậy, ta không thể đo trực tiếp mà phải suy luận. Ta gọi một tính chất được khẳng định là đúng bằng suy luận là một định lí* " (SGK thí điểm Toán 7, 2001).

Nói chung trong chương trình toán ở trường phổ thông, các định lí thường được đưa vào một cách tường minh, nghĩa là xuất hiện rõ ràng dưới một cái nhãn « Định lí ». Nhưng cũng có những mệnh đề có cơ chế của một định lí (nghĩa là được chứng minh là đúng), nhưng lại không được nêu thành định lí. Chẳng hạn, các công thức lượng giác như công thức cộng, công thức biến đổi tổng thành tích, …

Ở đây, ta trình bày việc dạy học một mệnh đề có cơ chế của định lí, dù nó có được nêu thành định lí hay không.

2. Yêu cầu của dạy học định lí ở trường phổ thông

Nhìn vào sơ đồ cấu trúc hệ thống khoa học toán học nói chung và toán học ở trường phổ thông nói riêng (xem mục 2.2 của phần « Dạy học khái niệm toán học ») ta thấy, cùng với khái niệm, định lí là một đối tượng mấu chốt của dạy học toán học.

Việc dạy học định lí ở trường phổ thông nhằm đạt tới các yêu cầu sau đây:

a) Góp phần làm cho học sinh thấy được nhu cầu rời khỏi Hình học quy nạp – thực nghiệm[16] mà họ đã tiếp xúc trước lớp 7 và tính cần thiết dùng đến suy luận và chứng minh để xây dựng một Hình học suy diễn, thấy được rằng suy luận và chứng minh là một đặc trưng

[16] « Hình học quy nạp – thực nghiệm » là cách gọi tắt của Hình học trong đó các đối tượng kiến thức được hình thành qua thực nghiệm (quan sát, đo đạc, gấp hình,...). Còn trong « Hình học suy diễn » chúng hình thành nhờ vào suy luận diễn dịch.

cơ bản của toán học, một yếu tố quan trọng trong phương pháp tiến hành các hoạt động toán học.

b) Hình thành và phát triển ở học sinh năng lực suy luận và chứng minh, bao gồm các năng lực : Hiểu được chứng minh, soạn thảo được chứng minh, tìm tòi chứng minh, đánh giá được chứng minh, …

c) Làm cho học sinh nắm được một hệ thống các định lí cơ bản và mối quan hệ giữa chúng. Có kĩ năng vận dụng các định lí vào việc giải quyết các vấn đề của toán học, của khoa học khác hay của thực tiễn.

Tuỳ theo cấp độ lớp mà tầm quan trọng của mỗi yêu cầu có thể thay đổi. Ở bậc THCS, yêu cầu thứ nhất đóng một vai trò đặc biệt quan trọng, nhất là khi học sinh mới bắt đầu tiếp cận với chứng minh. Trong khi ở bậc THPT, yêu cầu này lại có phần giảm nhẹ so với hai yêu cầu sau.

3. Tiến trình dạy học định lí ở trường phổ thông

3.1. Tiến trình: Thực nghiệm / Suy luận

Tiến trình này dựa trên quan điểm cho rằng hoạt động thực nghiệm (quan sát, đo đạc, mò mẫm, dự đoán, …) và hoạt động nghiên cứu lí thuyết chỉ là các thời điểm khác nhau của hoạt động toán học (trong nghiên cứu cũng như trong dạy học toán). Nghiên cứu thực nghiệm và nghiên cứu lí thuyết có mối quan hệ biện chứng không thể tách rời. Vì thế, phát triển khả năng thực nghiệm cũng có vai trò quan trọng như phát triển các năng lực tư duy, khả năng suy luận, trí tưởng tượng, …

Chính vì quán triệt quan điểm này mà chương trình môn toán THPT, 2003 của Cộng hoà Pháp nêu rõ :

"*Các khả năng thực nghiệm, suy luận, tưởng tượng, phân tích đánh giá phải được phát triển đồng thời : trình bày một vấn đề, dự đoán về kết quả, thực nghiệm trên các ví dụ, thiết lập một chứng minh, vận dụng các công cụ lí thuyết, trình bày lời giải, kiểm tra kết quả đạt được, đánh giá tính thích đáng của chúng so với vấn đề đặt ra chỉ là những thời điểm khác nhau của cùng một hoạt động toán học*".

Ở Việt Nam, theo truyền thống, chúng ta thường nhấn mạnh trên mặt suy diễn của toán học, coi nhẹ mặt ứng dụng của nó và vì thế thường coi nhẹ khả năng quan sát, so sánh, mò mẫm, dự đoán, phân tích phê bình, … Để khắc phục khiếm khuyết này, chương trình toán THCS hiện nay đã phần nào đề cập đến một cách tường minh một vài yếu tố của hoạt động thực nghiệm:

"*Rèn luyện khả năng suy luận hợp lý và hợp logic, **khả năng quan sát, dự đoán.** Phát triển trí tưởng tượng không gian. Rèn luyện khả năng sử dụng ngôn ngữ chính xác, bồi dưỡng các phẩm chất của tư duy như linh hoạt độc lập và sáng tạo*" (Chương trình THCS môn toán, NXB GD 2002, tr. 13).

"*Đặc biệt, các kiến thức hình học được trình bày theo con đường kết hợp trực quan và suy diễn. Bằng đo đạc, thực hành, gấp hình ... Học sinh **dự đoán các sự kiện hình học** và tiếp cận với các định lí* " (Sách giáo viên Toán 7, NXB GD 2003, tr. 11).

Dạy học toán ở trường THPT cũng là cơ hội để hình thành và phát triển khả năng thực nghiệm cho học sinh.

Đặc biệt, việc quán triệt quan điểm thực nghiệm trong dạy học định lí thể hiện rõ nét nhất trong tiến trình dạy học Thực nghiệm / Suy luận, được mô tả qua các bước sau đây.

Các bước của tiến trình Thực nghiệm / Suy luận:

Bước 1: Nghiên cứu thực nghiệm qua các ví dụ, các đối tượng cụ thể (số, hình, đồ thị, ...).

Bước 2: Phỏng đoán (phát hiện một mệnh đề).

Bước 3: Bác bỏ hay khẳng định phỏng đoán.

Bước 4: Phát biểu định lí (nếu mệnh đề phỏng đoán được chứng minh là đúng).

Bước 5: Củng cố và vận dụng định lí.

Chú ý: Bước 3 đóng một vai trò quan trọng trong sự nối kết biện chứng giữa nghiên cứu thực nghiệm (bước 1) và nghiên cứu lí thuyết (suy luận ở bước 3). Tuy nhiên, tuỳ theo trình độ học sinh và đặc điểm của định lí, đôi khi bước 3 được bỏ qua. Người ta thừa nhận tính đúng đắn của phỏng đoán và trình bày ngay định lí.

Ví dụ 1: Dạy học định lí về "Số hạng tổng quát của cấp số nhân".

- Bước 1: Sau khi đã nêu định nghĩa cấp số nhân, giáo viên yêu cầu học sinh biểu diễn u_2 qua u_1, u_3 qua u_1, u_4 qua u_1.
- Bước 2: Yêu cầu học sinh nhận xét các kết quả đạt được để phỏng đoán về công thức biểu diễn u_n qua u_1 là : $u_n = u_1.q^{n-1}$ Giáo viên nhấn mạnh rằng đó chỉ là một phỏng đoán.
- Bước 3 : Chứng minh phỏng đoán bằng phương pháp quy nạp.
- Bước 4 : Phát biểu định lí.
- Bước 5 : Củng cố và vận dụng.

Cho các ví dụ tính u_n trong các trường hợp cụ thể, chẳng hạn bài toán sau :

«Anh A gửi vào ngân hàng một số tiền là 1000.000.000 đồng với lãi suất định kì 0,5%/tháng. Hàng tháng anh không rút lãi ra, mà để nhập vào vốn để sinh lãi tiếp. Hỏi sau 20 năm anh A nhận tổng cộng số tiền bao nhiêu ?»

Ví dụ 2 : Dạy học định lí về phương tích của một điểm với một đường tròn (Hình học 10, NXB GD 2001), có sử dụng phần mềm Cabri – Géométry.

Bước 1. Nghiên cứu thực nghiệm:

- Với máy tính có trang bị phần mềm Cabri – Géométry và máy chiếu đa phương tiện, giáo viên vẽ một đường tròn bất kì.

Lấy điểm M cố định nằm ngoài hình tròn. Kẻ đường thẳng Δ bất kì qua M và cắt đường tròn tại A và B.

– Dán kết quả $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ lên màn hình[17].

– Chọn một vị trí khác của Δ (luôn qua M), cắt đường tròn tại C và D. Dán kết quả

[17] Trong Cabri-Geometry có thể tạo một Macro cho phép tính tự động tích vô hướng của hai vectơ (không kèm theo đơn vị cm). Để hiểu rõ hơn, tham khảo giáo án chi tiết về phương tích của một điểm đối với một đường tròn trong luận văn tốt nghiệp của Trần Thị Ngọc Diệp (2005).

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ lên màn hình.

– Yêu cầu học sinh nhận xét hai kết quả này.

– Di chuyển vị trí của đường thẳng Δ (luôn qua M). Khi đó hai điểm A và B sẽ thay đổi theo. Yêu cầu học sinh quan sát kết quả tương ứng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ được dán lên màn hình và đưa ra nhận xét về $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ khi Δ thay đổi nhưng vẫn qua M.

• Vẽ một đường tròn khác và điểm M nằm trong hình tròn. Thực hiện tương tự như trên.

Bước 2. Phỏng đoán:

• Từ hai nhận xét trên, yêu cầu học sinh nêu lên một phỏng đoán.

Phỏng đoán mong đợi :

"*Tích* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ *là một số không đổi khi Δ quay quanh M và cắt O*".

• Xét vị trí đặc biệt khi Δ là tiếp tuyến (A ≡ B) để dự đoán số không đổi này là:

$$MO^2 - R^2\text{, hay } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$$

• *Bước 3*. Khẳng định phỏng đoán : Tiến hành chứng minh mệnh đề phỏng đoán trên.

• *Bước 4.* Phát biểu định lí :

"*Cho đường tròn (O; R) và một điểm M cố định. Một đường thẳng thay đổi đi qua M và cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Khi đó tích vô hướng* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ *luôn là một số không đổi*".

• *Bước 5*. Đưa vào khái niệm phương tích. Củng cố, vận dụng định lí và khái niệm này.

Trong bước 1 của ví dụ trên, nếu có đủ trang thiết bị công nghệ thông tin, thì nên tổ chức dưới dạng hoạt động của chính học sinh : Mỗi học sinh (hay nhóm học sinh) sử dụng một máy vi tính có trang bị phần mềm Cabri – Géométry để thực hiện các công việc đã nêu, từ đó thảo luận để đưa ra phỏng đoán.

Chú ý: Hiện nay, tiến trình Thực nghiệm / Suy luận đã được vận dụng trong sách giáo khoa toán bậc THCS. Nhưng tuần tự các bước thường là: Nghiên cứu thực nghiệm → Phỏng đoán → Phát biểu định lí → Chứng minh (hay công nhận) định lí → Củng cố, vận dụng.

Tuần tự này có một vài khiếm khuyết.

Quả thực, khi trình bày xong một phỏng đoán, học sinh đứng trước hai câu hỏi cần trả lời (hay hai vấn đề cần phải giải quyết) : Phỏng đoán đúng hay sai? Vì sao?

Nói cách khác, họ đứng trước một bài toán mở cần giải quyết[18] và có một sự không chắc chắn về chân lí của mệnh đề phỏng đoán (không biết nó đúng hay sai ?). Tính không chắc chắn này là động cơ để học sinh làm những phép thử, những mò mẫm, … Đó chính là cơ hội phát triển dần dần ở học sinh các khả năng nghiên cứu khoa học.

Tuy nhiên, nếu ta phát biểu ngay định lí, thì câu trả lời cho câu hỏi thứ nhất đã được xác định. Tính lưỡng lự bị mất. Nhiệm vụ duy nhất còn lại của học sinh chỉ là làm rõ vì sao mệnh đề phỏng đoán đúng (chứng minh định lí).

N. Balacheff (1982) đã phê bình hiện tượng tương tự như vậy khi bàn về dạy học chứng minh ở các trường phổ thông, Cộng hoà Pháp:

---

[18] Xem khái niệm Bài toán mở ở phần D.

"Các tình huống dạy học chứng minh đã tước đi ở học sinh trách nhiệm về "cái đúng". Thông thường các bài toán về chứng minh đều được trình bày dưới dạng "Chứng minh rằng ...". Nói cách khác, mệnh đề cần chứng minh luôn được khẳng định là đúng. Vấn đề còn lại đối với học sinh chỉ là tìm ra một chứng minh."

Chính vì vậy, nên áp dụng tiến trình Thực nghiệm / Suy luận theo đúng tuần tự các bước đã trình bày.

3.2. Tiến trình : Bài toán → Định lí

Bước 1 : Giải các bài toán.

Bước 2 : Phát biểu định lí như là kết quả của việc giải quyết các bài toán (thể chế hoá).

Bước 3 : Củng cố và vận dụng định lí.

Ví dụ : Dạy học định lí về bất đẳng thức Cosi ở lớp 10.

• *Bước 1* : Trong phần đầu của bài "Chứng minh bất đẳng thức", học sinh được cung cấp hai phương pháp chủ yếu để chứng minh một bất đẳng thức :

– PP1 : Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức đã biết là đúng, chẳng hạn : $A^2 \geq 0$ với mọi A ; $A^2 + B^2 \geq 0$ với mọi A, B ; …
– PP2 : Từ bất đẳng thức đúng đã biết đi đến bất đẳng thức cần chứng minh.

Từ đó, giáo viên đề nghị học sinh chứng minh bất đẳng thức

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \text{ với } \forall\ a, b \geq 0.$$

Một trong các lời giải mong đợi : Với a, b không âm ta có,

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Vậy, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ đúng.

• *Bước 2* : Bằng pha thể chế hoá, giáo viên phát biểu định lí về bất đẳng thức Cosi.

• *Bước 3* : Củng cố và vận dụng định lí.

– Nhấn mạnh lại giả thiết và kết luận của định lí, nêu cách ghi nhớ định lí, …
– Dùng chứng minh các bất đẳng thức khác.
– Vận dụng vào bài toán tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất : Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau. Ngược lại, nếu tích của chúng không đổi thì tổng của chúng sẽ bé nhất khi hai số bằng nhau.

Chú ý : Tiến trình này sẽ trở nên tự nhiên và thú vị hơn nếu bài toán cần giải không được đưa ra một cách đột xuất, mà là kết quả của hoạt động tạo tình huống gợi vấn đề (theo nghĩa đã nêu trong phương pháp Phát hiện và giải quyết vấn đề).

3.3. Tiến trình suy diễn

Bước 1 : Phát biểu định lí.

Bước 2 : Chứng minh (hoặc công nhận định lí).

Bước 3 : Củng cố và vận dụng định lí.

3.4. Tổng kết và so sánh các tiến trình

■ **Chú ý** : Thông thường, các tiến trình trên có thể bắt đầu bằng pha tạo động cơ (tương tự như dạy học một khái niệm).

Các tiến trình dạy học định lí

Thực nghiệm / Suy luận	**Bài toán → Định lí**	**Suy diễn**
0. Tạo động cơ 1. Nghiên cứu thực nghiệm 2. Phỏng đoán 3. Bác bỏ hay khẳng định phỏng đoán 4. Phát biểu định lí 5. Củng cố, vận dụng	0. Tạo động cơ 1. Giắc các bài toán 2. Phát biểu định lí 3. Củng cố, vận dụng.	0. Tạo động cơ 1. Phát biểu định lí 2. Chứng minh hay công nhận định lí 3. Củng cố, vận dụng

a) Tiến trình « Thực nghiệm / Suy luận »

• Ưu điểm :

+ Học sinh thấy rõ được con đường nảy sinh của định lí. Nói cách khác, học sinh học được cách phát hiện định lí.

+ Tạo được động cơ đưa vào định lí và nhu cầu phải chứng minh : Chính nhu cầu giải quyết các mâu thuẫn nảy sinh khi tiến hành các phỏng đoán hay nhu cầu tìm hiểu chân lí của mệnh đề phỏng đoán sẽ tạo động cơ cho chứng minh.

+ Tạo điều kiện hình thành hay củng cố cho học sinh các quy tắc kiểm nghiệm sau :

– Một phản ví dụ là đủ chứng minh một mệnh đề toán học là sai.

– Các ví dụ, dù nhiều bao nhiêu, cũng không đủ để khẳng định một mệnh đề toán học là đúng.

– Ghi nhận thực nghiệm chỉ cho phép dự đoán chứ không cho phép khẳng định tính đúng sai của một mệnh đề.

+ Học sinh được làm quen dần với hoạt động nghiên cứu khoa học. Phát triển ở họ các phẩm chất tư duy độc lập, sáng tạo, phê phán, … khả năng thực nghiệm (quan sát, mò mẫm, dự đoán, …), khả năng học tập bằng « thử, sai », …

• Nhược điểm :

Mất nhiều thời gian và công sức của cả giáo viên và học sinh, đòi hỏi giáo viên phải có khả năng quản lí giờ học không còn theo kiểu truyền thống (nhất là trong các pha tranh luận để đi đến phỏng đoán).

b) Tiến trình « Bài toán → Định lí »

• Ưu điểm:

– Định lí xuất hiện tự nhiên như kết quả của hoạt động giải các bài toán. Nói cách khác, tri thức mới không được cho một cách trực tiếp, mà nảy sinh trong quá trình giải các bài toán.

– Phù hợp với quan điểm: học tập trong hoạt động và bằng hoạt động. Học sinh có nhiều thuận lợi để hoạt động tích cực và tự giác. Hơn nữa, nếu tạo được tình huống có vấn

đề thì dễ tạo động cơ và gây hứng thú cho học sinh. Đặt biệt, khi kết quả của việc tạo tình huống có vấn đề là các bài toán mà ta mong muốn học sinh giải quyết để đi đến định lí, thì ta cũng đã tạo cơ hội để họ học cách phát hiện định lí.

- Nhược điểm:

– Khó có cơ hội phát triển được ở học sinh các khả năng thực nghiệm (quan sát, dự đoán, …), những khả năng cần thiết cho hoạt động nghiên cứu toán học.

– Khó tạo điều kiện hình thành hay củng cố ở học sinh các quy tắc kiểm nghiệm như đã nêu ở trên, nhất là đối với học sinh ở trường THCS khi mới làm quen bước đầu với suy luận và chứng minh.

c) Tiến trình « Suy diễn »

- Ưu điểm:

– Ngắn gọn, tiết kiệm thời gian.

– Giáo viên dễ làm chủ tiến trình lên lớp, dễ quản lí giờ học.

- Nhược điểm:

– Khó tạo động cơ và khó gây hứng thú học tập cho học sinh. Hạn chế khả năng phát triển năng lực tư duy tích cực, độc lập và sáng tạo của họ.

– Không phát triển được ở học sinh các khả năng thực nghiệm (quan sát, dự đoán, …) - những khả năng cần thiết cho hoạt động nghiên cứu toán học.

– Không tạo điều kiện hình thành hay củng cố ở học sinh các quy tắc kiểm nghiệm như đã nêu ở trên, nhất là đối với học sinh ở trường THCS khi mới làm quen bước đầu với suy luận và chứng minh.

– Định lí xuất hiện không tự nhiên, có tính áp đặt. Tri thức mới được cho trực tiếp. Do vậy học sinh không hiểu được nguồn gốc nảy sinh, cũng như vai trò và ý nghĩa của tri thức mới.

3.5. Tạo động cơ chứng minh

Theo truyền thống, lớp 6 và lớp 7 bậc THCS thuộc giai đoạn chuyển tiếp giữa hai cách tiếp cận Hình học : tiếp cận bằng quy nạp – thực nghiệm và tiếp cận bằng suy diễn (ta gọi tắt là Hình học quy nạp – thực nghiệm và Hình học suy diễn).

Trong Hình học quy nạp – thực nghiệm, các đối tượng hình học cơ bản lần lượt được đưa vào chủ yếu thông qua việc sử dụng các dụng cụ đo, vẽ, … hay quan sát trực quan trên hình. Các tính chất toán học cũng được rút ra từ hoạt động thực nghiệm. Ngược lại, Hình học suy diễn (theo truyền thống thường được đưa vào chính thức từ lớp 7) đòi hỏi các tính chất toán học phải được hợp thức hoá bởi suy luận diễn dịch.

Như vậy, luôn tồn tại một sự ngắt quãng giữa hai cách tiếp cận hình học. Việc dạy học suy luận và chứng minh không thể không kế thừa tri thức trực quan, không thể tách rời hoạt động thực nghiệm đã có ở các lớp trước. Nhưng nó cũng đòi hỏi học sinh phải từ bỏ việc dùng ghi nhận thực nghiệm để khẳng định tính đúng đắn một mệnh đề toán học. Điều này đặt ra nhiều khó khăn cho việc dạy học hình học trong giai đoạn chuyển tiếp. Đặc biệt đối với học sinh, tiếp cận "quan sát – thực nghiệm" dường như là một chướng ngại lớn cho việc học tập suy luận và chứng minh.

Vì thế, câu hỏi "làm thế nào để học sinh hiểu được lí do phải dùng đến suy luận và chứng minh, lí do từ bỏ quan sát, đo đạc, …", nói cách khác, "tạo động cơ chứng minh cho học sinh như thế nào ?" là một vấn đề khó khăn cần giải quyết. Thông thường, người ta hay khuyên dùng hình vẽ để làm cho học sinh thấy sự khiếm khuyết của quan sát, thực nghiệm: Kết quả rút ra từ quan sát, thực nghiệm có thể sai. Nhưng biện pháp này dường như không có mấy hiệu quả.

Ở bậc THPT áp lực này bớt căng thẳng hơn, nhưng chưa có gì đảm bảo rằng học sinh đã ý thức được hoàn toàn về lí do phải chứng minh.

Một trong các biện pháp có thể áp dụng ở cấp độ này là khai thác tốt tiến trình Thực nghiệm / Lí thuyết trong dạy học định lí.

Quả thực, vấn đề mấu chốt nhất trong tiến trình này là thực hiện các hoạt động thực nghiệm và trình bày một dự đoán.

Đặc trưng cơ bản của dự đoán là tính « bấp bênh » (incertitude) của các kết quả đạt được từ quan sát thực nghiệm. Chính tính bấp bênh này làm nảy sinh nhu cầu phải giải thích để thuyết phục người khác, và từ đó tạo nên nhu cầu suy luận và chứng minh, đồng thời làm nổi bật vai trò của công cụ chứng minh (vai trò hợp thức hoá). Trong trường hợp nếu tổ chức dạy học tạo ra được sự "ganh đua tích cực" giữa học sinh hay các nhóm học sinh để khuyến khích họ bảo đảm tính hợp thức của kết quả mà họ rút ra từ hoạt động thực nghiệm, thì lại càng thuận lợi hơn cho việc tạo động cơ suy luận và chứng minh.

Chẳng hạn, nếu khi đo và tính tổng số đo các góc của một tam giác, mà tất cả các học sinh đều cho cùng một kết quả là 180°, thì phỏng đoán « tổng số đo các góc trong của một tam giác bất kì bằng 180° » mất đi đặc trưng « bấp bênh ». Như vậy, chính bản thân học sinh sẽ không còn có nhu cầu phải giải thích, phải chứng minh. Ngược lại, nếu các em cung cấp một dãy các kết quả như 181°, 179°, 178°5', 182°, 178°, 180^0, … , và nếu các em nhận xét được rằng các kết quả này mặc dù khác nhau, nhưng luôn giao động xung quanh 180°, thì phỏng đoán trên trở nên có giá trị hơn. Bởi vì, chính sự bất định của kết quả đạt được và sự được thua giữa học sinh hay nhóm học sinh sẽ gợi nên nhu cầu tranh luận và như vậy tạo động cơ cho suy luận và chứng minh.

Rèn luyện khả năng đưa ra các dự đoán từ quan sát, thực nghiệm không chỉ bó hẹp trong dạy học các định lí theo tiến trình Thực nghiệm/ Lí thuyết, mà còn có thể khai thác ngay trong quá trình tìm tòi cách chứng minh.

Chẳng hạn, để rèn luyện khả năng áp dụng các phương pháp chứng minh hai mặt phẳng P và Q song song với nhau đã học trong phần lí thuyết, ta có thể bắt đầu pha tìm tòi chứng minh từ các câu hỏi như :

– Có thể dự đoán xem mặt phẳng P có chứa hai đường thẳng cắt nhau nào cùng song song với Q ?
– Có thể dự đoán xem P và Q cùng song song với mặt phẳng thứ ba nào ?

3.6. Củng cố bước đầu định lí

Tương tự như dạy học khái niệm, củng cố định lí là một quá trình lâu dài, có thể trải qua nhiều giai đoạn và cấp độ khác nhau. Ngay cả khi định lí vừa được trình bày, ta cũng cần tiến hành củng cố bước đầu định lí này bằng một số hoạt động như :

– Phân tích định lí.

– Khái quát hoá, đặc biệt hoá định lí.

a) Phân tích định lí : Phân tích làm rõ đặc trưng quan trọng thể hiện tường minh hay ẩn tàng trong định lí, làm rõ giả thiết và kết luận, trình bày định lí dưới dạng kênh hình, vẽ hình minh hoạ, …

b) Khái quát hoá, đặc biệt hoá : Hai hoạt động này cũng cho phép củng cố ban đầu định lí, vì nó cho phép hiểu rõ hơn các đặc trưng của định lí, mối quan hệ của định lí với các định lí đã học, với định lí mới mà ta công nhận hay sắp chứng minh và cả với những mệnh đề dự đoán mà ta mong muốn học sinh đi sâu nghiên cứu.

Ví dụ 1 : Định lí cosin trong tam giác

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Xét trường hợp đặc biệt khi A = 90^0 sẽ dẫn tới định lí Pythagore quen thuộc : $a^2 = b^2 + c^2$.

Ví dụ 2 : Bất đẳng thức Cosi :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ với } \forall\ a \geq 0, b \geq 0.$$

– Khái quát hoá cho trường hợp 3 số không âm, ta có bất đẳng thức :

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \text{ với } \forall\ a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0.$$

Trong SGK Đại số 10, NXB GD 2001, bất đẳng thức này được thừa nhận, không chứng minh.

– Khái quát hoá cho trường hợp n số không âm, ta có bất đẳng thức :

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \text{ với } \forall\ a_i \geq 0, i = 1, \ldots, n.$$

Bất đẳng thức này có thể trình bày dưới dạng một kiến thức ngoài chương trình và yêu cầu học sinh khá giỏi tìm cách chứng minh.

Chú ý : Ngay cả khi kết quả của khái quát hoá là một mệnh đề sai, thì hoạt động này cũng cho phép hiểu rõ hơn bản chất của định lí. Chẳng hạn, sau khi đưa vào công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, thì câu hỏi khái quát như sau cũng cho phép nắm vững hơn công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

Các đẳng thức sau đúng hay sai :

a) $\sin^n x + \cos^n x = 1$

b) $\sin^2 u(x) + \cos^2 u(x) = 1$

c) $\sin^2 nx + \cos^2 nx = n$ …

Việc bác bỏ các đẳng thức a, c có thể thực hiện được nhờ vào các phản ví dụ.

4. Dạy học chứng minh

4.1. Khái niệm chứng minh

• Trong phạm vi logic toán :

Trong cuốn « Tập hợp và logic » (NXB GD, 1998), các tác giả Hoàng Xuân Sính và Nguyễn Mạnh Trinh cho định nghĩa :

"*Ta gọi là một chứng minh một dãy hữu hạn những lập luận (mệnh đề) được kí hiệu dưới dạng các công thức sau : $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$.*

Sao cho, với mọi i (i = 1, 2, … , n) A_i phải thoả mãn một trong các điều kiện sau :

(i) Hoặc A_i là tiên đề, hoặc A_i là một định lí, hoặc A_i là giả thiết (hay điều kiện) đã cho trước.

(ii) Hoặc A_i là công thức tương đương với một công thức có mặt trong dãy đứng trước nó.

(iii) Hoặc A_i là hệ quả logic được suy ra từ các công thức có mặt trong dãy đứng trước nó ".

Còn theo Lê Tử Thành (1995) :

"*Chứng minh là một hình thức suy luận, dựa vào những phán đoán mà tính chân thực được công nhận để khẳng định tính chân thực của một phán đoán khác cần được chứng minh*".

• **Trong phạm vi khoa học toán học :**

"*Chứng minh là "Phép suy luận để thiết lập sự đúng hay sai của một khẳng định (phán đoán, mệnh đề, định lí)* " (Từ điển toán học, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1993).

• **Trong dạy học toán ở trường THCS** :

"*Chứng minh định lí là dùng lập luận để suy từ giả thiết ra kết luận. Lập luận là nêu những khẳng định và vạch rõ vì sao, căn cứ vào đâu mà có những khẳng định đó* " (Hình học 7, NXB GD 1995).

"*Chứng minh định lí là dùng suy luận để khẳng định kết luận (được suy ra từ giả thiết) là đúng* " (SGK Toán 7, NXB GD 2002).

Ví dụ : Chứng minh bất đẳng thức Côsi :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\text{, với } \forall a \geq 0, b \geq 0 \text{ (T)}$$

$(a - b)^2 \geq 0$, với $\forall a \geq 0, b \geq 0$ (A_1)

$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$, với $\forall a \geq 0, b \geq 0$ (A_2)

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$, với $\forall a \geq 0, b \geq 0$ (A_3)

$\Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$, với $\forall a \geq 0, b \geq 0$ (A_4)

$\Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$, với $\forall a \geq 0, b \geq 0$ (A_5).

$\Rightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, với $\forall a \geq 0, b \geq 0$ $(A_6 \equiv T)$

4.2. Cấu trúc của chứng minh

Hoạt động nhận thức tương ứng với chứng minh có hai đặc trưng cơ bản cho phép phân biệt chứng minh với các hình thức suy luận khác (như quy nạp, giải thích, thuyết phục) :

– Chứng minh là một dãy hữu hạn các mệnh đề được nối kết với nhau theo vai trò (cơ

chế) của các mệnh đề, mà không phải theo nội dung hay nghĩa của các mệnh đề này.

– Các mệnh đề được tạo ra bởi phép thay thế một mệnh đề cũ trước đó (giả thiết, hay kết quả của một phép thay thế đã thực hiện trước đó) bằng một mệnh đề mới. Việc thay thế được thực hiện nhờ vào một mệnh đề "chuẩn" (một định nghĩa, tiên đề, định lí), nó hoạt động như là quy tắc cho phép sự thay thế này.

• Ví dụ minh hoạ chứng minh không phụ thuộc nội dung mệnh đề :

Xét mệnh đề : « Nếu 2 = -2, thì 4 = 4 »

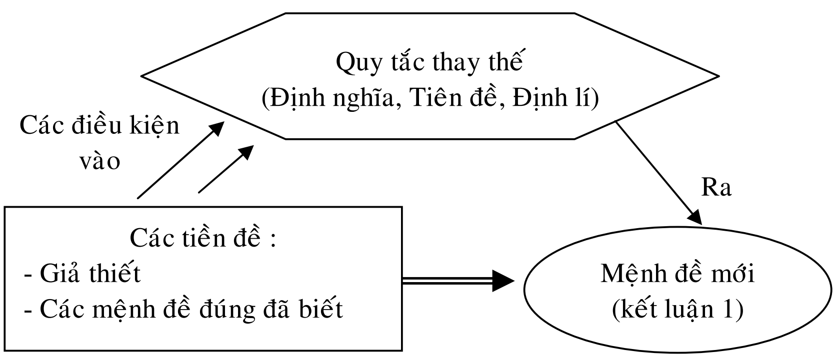
Chứng minh :

$2 = -2$ (T_1 – Mệnh đề giả thiết)

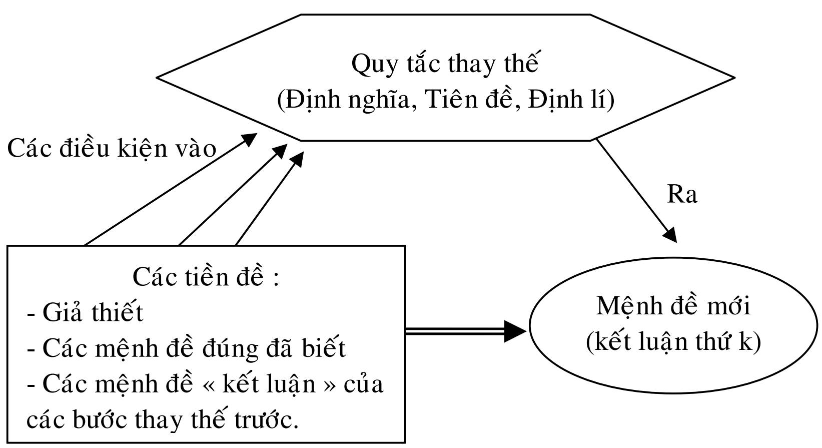
$\Rightarrow 2^2 = (-2)^2$ (T_2 – Mệnh đề kết luận được rút ra nhờ vào mệnh đề chuẩn : « nếu $a = b$ thì $a^2 = b^2$ »).

$\Rightarrow 4 = 4$ (T – mệnh đề cần chứng minh).

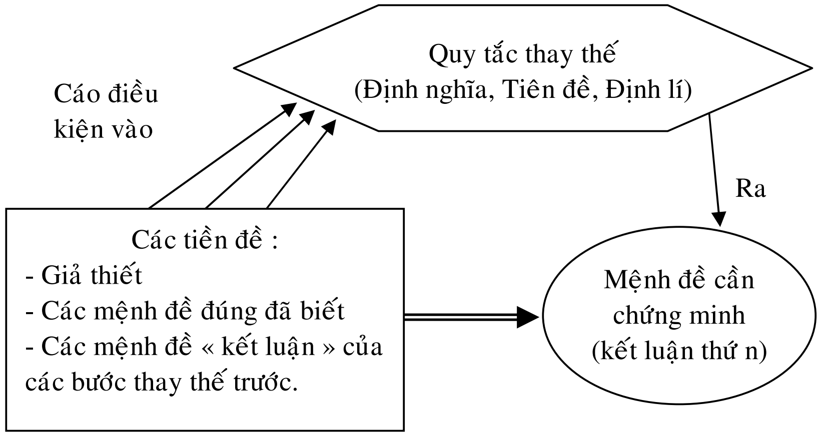
Như vậy, chứng minh được hiểu là một dãy hữu hạn các "bộ ba" hay "mắt xích" sau đây:



… … … … … … … … … … … … …



… … … … … … … … … … … … …



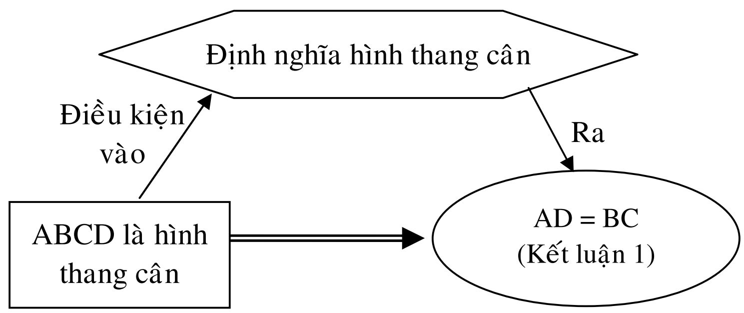
■ **Chú ý :** Thực ra, ngoài ba thành phần nêu trên, còn có một thành phần thứ tư tác động ngầm ẩn trong chứng minh, mà ta sẽ nói đến ở phần sau, đó là các *quy tắc suy diễn*.

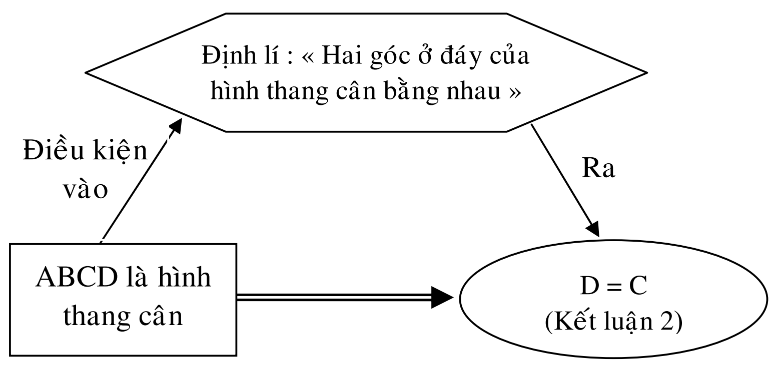
• **Ví dụ 1** : Định lí «Trong hình thang cân hai đường chéo bằng nhau ».

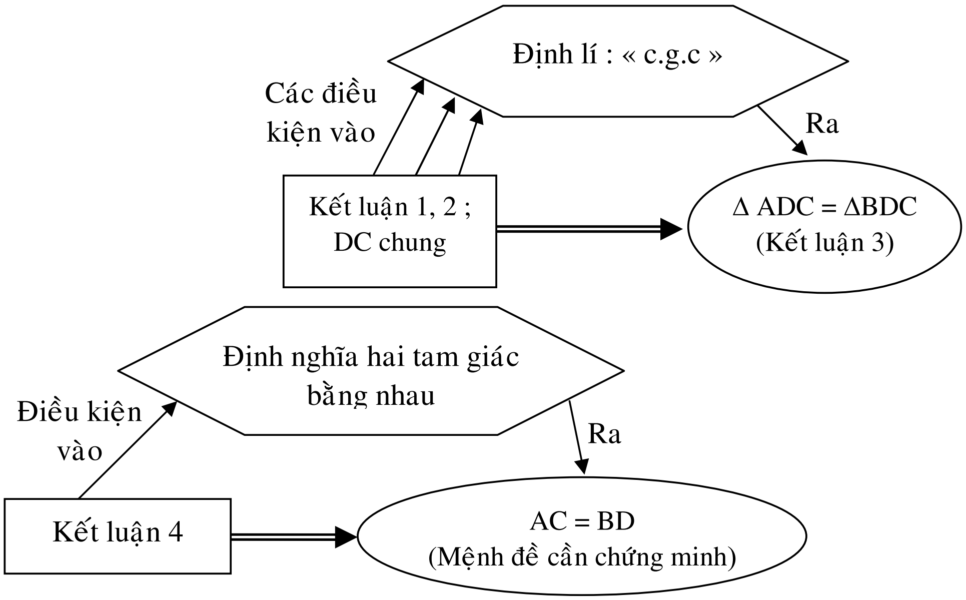
Chứng minh : Giả sử ABCD là một hình thang cân đáy AB và CD.

ABCD là mộthình thang cân ⇒ AD = BC và D = C ⇒ ΔADC = ΔBCD (cgc) ⇒ AC = BD.

Cấu trúc của chứng minh này có thể mô tả như sau :







♦ **Chú ý : C**ác quy tắc suy diễn logic xuất hiện ngầm ẩn trong chứng minh trên là quy tắc tam đoạn luận : $\dfrac{P \Rightarrow Q, P}{Q}$.

■ **Các thành phần của chứng minh**

Từ các phân tích trên, ta thấy có bốn thành phần cùng hoạt động trong một chứng minh:

1. Các điều kiện vào (các tiền đề – prémisses) : Đó là các mệnh đề đã cho (giả thiết), các mệnh đề kết luận của các bước trước đó, mệnh đề đúng đã biết.
2. Các quy tắc thay thế (luận cứ) : Định nghĩa, định lí, tiên đề, quy tắc, công thức đã biết.
3. Các kết luận : Kết quả của các bước thay thế. Trong đó mệnh đề cần chứng minh gọi là *luận đề*.
4. Quy tắc suy diễn logic thường gặp (*Luận chứng*).

a) Quy tắc tam đoạn luận : $\dfrac{\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}; \mathrm{A}}{\mathrm{B}}$

b) Tam đoạn luận bắc cầu : $\dfrac{\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}; \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C}}{\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}}$

c) Tam đoạn luận phủ định : $\dfrac{A \Rightarrow B; \overline{B}}{\overline{A}}$

d) Các quy tắc phản chứng :

$$\frac{\overline{A} \Rightarrow \left(B \wedge \overline{B}\right)}{A}\ ;\quad \frac{B; \left(\overline{A} \Rightarrow \overline{B}\right)}{B}\ ;\quad \frac{\overline{A} \wedge B \Rightarrow \overline{B}}{B \Rightarrow A}$$

e) Một số quy tắc khác :

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}}\ ;\quad \frac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow B}\ ;\quad \frac{\overline{\forall x, P(x)}}{\exists x, \overline{P(x)}}\ ;\quad \frac{\overline{\exists x, P(x)}}{\forall x, \overline{P(x)}}$$

f) Quy tắc (nguyên lí) quy nạp toán học :

Cho mệnh chứa biến : $P(n)$ với $n \in Z$ và hằng số $c \in Z$

Tiền đề : a. $P(c)$ đúng

b. Nếu $P(k)$ đúng với $k \geq c$, thì $P(k+1)$ cũng đúng.

Kết luận : $P(n)$ đúng với mọi $n \geq c$.

Quy tắc này có thể viết dưới dạng :

$$\frac{\begin{array}{ll} P(c). & \text{(mệnh đề cơ sở).} \\ P(k) \Rightarrow P(k+1),\ k \geq c & \text{(mệnh đề quy nạp).} \end{array}}{\begin{array}{ll} P(n),\ \forall\ n \geq c & \text{(mệnh đề kết luận).} \end{array}}$$

• Chú ý: Vai trò của một mệnh đề thay đổi theo từng bước thay thế. Trong bước này nó là kết luận, ở bước sau nó lại có thể là tiền đề. Cùng một mệnh đề, ở tình huống này là giả thiết hay kết luận, nhưng ở tình huống khác lại là "quy tắc thay thế".

4.3. Phân tích một chứng minh

Phân tích một chứng minh là phân tích cấu trúc của chứng minh đó. Nói cách khác là chỉ rõ trong mỗi bước của chứng minh, ta đã có những tiền đề nào, kết luận rút ra là gì, các quy tắc thay thế (luận cứ) và các quy tắc suy diễn nào đã được sử dụng.

Phân tích một chứng minh cho phép học sinh hiểu rõ hơn cấu trúc của nó, cho phép phát hiện các sai lầm (nếu có) và bản chất của sai lầm này.

■ Các hình thức phân tích một chứng minh

a) Phân tích theo bảng

Ví dụ 1 : Phân tích chứng minh bất đẳng thức Côsi mà ta đã trình bày trong phần trước.

Tiền đề	Các mệnh đề kết luận	Quy tắc thay thế (luận cứ)
$(a-b)^2 \geq 0$, với $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$	$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, với $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$	Tính chất đẳng thức : $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, với $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$	$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$, với $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$	Tính chất bất đẳng thức : $A \geq B \Leftrightarrow A + C \geq B + C$
$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$, với $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$	$a + b \geq 2\sqrt{ab}$, với $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$	Tính chất : Nếu A, B không âm và $A \geq B$ thì $\sqrt{A} \geq \sqrt{B}$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$, với $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, với $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$	Tính chất bất đẳng thức : Nếu $A \geq B$ và $C > 0$ thì $A.C \geq B.C$

Ví dụ 2 : « Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. M là trung điểm của SC. Chứng minh rằng mp (MBD) ⊥ mp (SAC). »

– Chứng minh :

Ta có BS = BC = a và M là trung điểm của SC. Suy ra BM ⊥ SC. (1)

Tương tự ta có : DM ⊥ SC. (2)

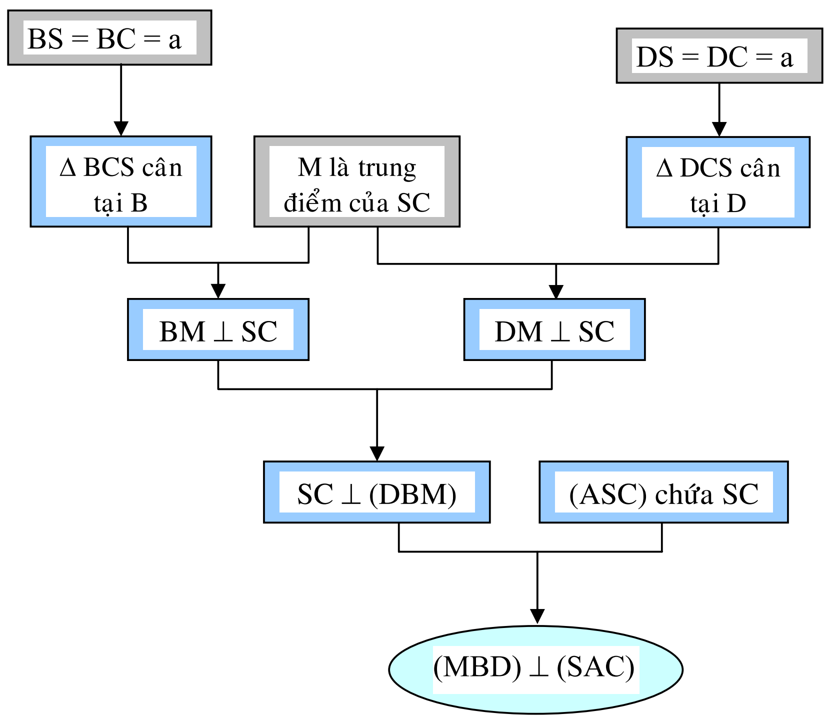
Từ (1) và (2) ta suy ra SC ⊥ (BDM). Vậy (SAC) ⊥ (BDM).

– Phân tích :

Tiền đề	**Các mệnh đề kết luận**	**Quy tắc thay thế (luận cứ)**
BS = BC = a	Δ BCS cân tại B (1)	Định nghĩa tam giác cân.
M là trung điểm SC Kết luận 1	BM ⊥ SC (2)	Định lí : "*Nếu tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A vừa là phân giác của vừa là đường cao.*"
DS = DC = a	Δ BCS cân tại B (3)	Định nghĩa tam giác cân
M là trung điểm SC Kết luận 3	DM ⊥ SC (4)	Định lí : "*Nếu tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A vừa là phân giác của vừa là đường cao.*"
Kết luận 2 Kết luận 4	SC ⊥ (BDM) (5)	Định lí : "*Nếu đường thẳng Δ vuông góc với hai đường thẳng a,b cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) thì Δ vuông góc với mọi đường thẳng c nằm trong mặt phẳng (P).* Định nghĩa : *Một đường thẳng Δ gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng đó.*"

(SAC) chứa SC Kết luận 5	(MBD) ⊥ (SAC).	Định nghĩa : “*Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu một trong hai mặt phẳng đó chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*”

b) Phân tích dưới dạng sơ đồ



c) Phân tích dưới dạng một dãy các bộ ba (xem ví dụ 1, mục 4.2).

Nhận xét:

– Trong tất cả các hình thức phân tích trên, thành phần thứ 4 « Quy tắc suy diễn » chỉ xuất hiện ngầm ẩn.

– Hình thức Sơ đồ không làm rõ quy tắc thay thế và sự thay đổi vai trò của các mệnh đề. Nhưng lại làm rõ sơ đồ ràng buộc giữa các mệnh đề.

– Hình thức Bảng và Dãy các bộ ba không chỉ làm rõ sự thay đổi vai trò của các mệnh đề, mà còn làm rõ các quy tắc thay thế (mệnh đề chuẩn). Chính việc làm rõ các mệnh đề chuẩn này góp phần củng cố kiến thức đã học cho học sinh, vì họ thấy rõ trong việc giải quyết các vấn đề, các định nghĩa và định lí đã học được áp dụng như thế nào, với những điều kiện nào thì chúng mới áp dụng được, …

4.4. Các yêu cầu của một chứng minh

a) Tiền đề và luận cứ phải chân thực :

– Các điều kiện vào chỉ có thể là giả thiết, các mệnh đề đúng đã biết, hay các mệnh đề kết luận của các bước thay thế trước.

– Các quy tắc thay thế phải là các định nghĩa, định lí, tính chất hay tiên đề đúng đã biết.

b) Luận chứng phải hợp logic : Các phép suy diễn được sử dụng (ngầm ẩn) phải hợp logic.

c) Không đánh tráo luận đề : Không thay thế mệnh đề cần chứng minh bằng một mệnh đề khác không tương đương với nó.

■ **Một số sai lầm do vi phạm các yêu cầu trên**

a) Sai lầm về mặt tiền đề: Thường do chỉ dựa vào trực giác hay sử dụng các mệnh đề chưa được chứng minh.

b) Sai lầm về mặt luận cứ : Do áp dụng sai định lí, tính chất, định nghĩa, tiên đề.

c) Sai lầm về mặt luận chứng : Do sử dụng quy tắc suy luận không hợp logic, chẳng hạn như các quy tắc sau đây.

$$1.\ \frac{P \Rightarrow Q, Q}{P} \qquad 2.\ \frac{P \Rightarrow Q, \overline{P}}{\overline{Q}} \qquad 3.\ \frac{P \vee Q, P}{\overline{Q}}$$

d) Sai lầm về luận đề : Do thay mệnh đề cần chứng minh bằng một mệnh đề không tương đương với nó.

■ **Các ví dụ minh hoạ**

Bài toán 1: « Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$ n dấu căn.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$ »

Xét bài làm sau của một học sinh:

« Nhận xét : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ (1). Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. Do $u_n > 0$ với mọi n, nên $a \geq 0$.

Từ một suy ra:

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2+u_n} \Rightarrow a = \sqrt{2+a}$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}\right..$$

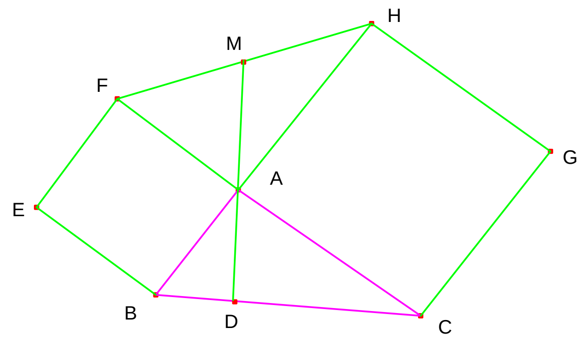
Loại a = -1.

Vậy : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$ ».

Bình luận : *Bài làm sai do dựa vào một tiền đề là một mệnh đề chưa được chứng minh. Đó là mệnh đề "Dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$".*

Bài toán 2 : Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABEF và ACGH. Từ A dựng đường vuông góc với BC, cắt BC ở D và cắt FH ở M. Chứng minh FM = MH.

Xét bài làm sau của một học sinh :



Vì AF = AB, AH = AC và $\widehat{FAH} = \widehat{BAC}$ (đối đỉnh), nên $\Delta AFH = \Delta ABC$.

Ta có :

$$\widehat{FAH} = \widehat{BAC},\ \widehat{DAC} + \widehat{ACD} = 90^0 \text{ và } \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^0$$

nên $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$ (2).

Mặt khác : vì $\widehat{DAC} = \widehat{FAM}$ (đối đỉnh), $\widehat{AFH} = \widehat{ABC}$ (do hai tam giác bằng nhau), nên $\widehat{AFH} = \widehat{FAM}$. Suy ra : FM = MA.

Chứng minh tương tự ta có MH = MA.

Vậy, FM = MH. »

Bình luận : *Sai lầm về mặt tiền đề. Học sinh đã vẽ ABC là tam giác vuông, nên ghi nhận trực giác rằng F, A, C thẳng hàng.*

Bài toán 3: Chứng minh rằng $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với mọi a, b≥0.

Xét bài làm của một học sinh :

"$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

$\Rightarrow (a - b)^2 \geq 0$ (1)

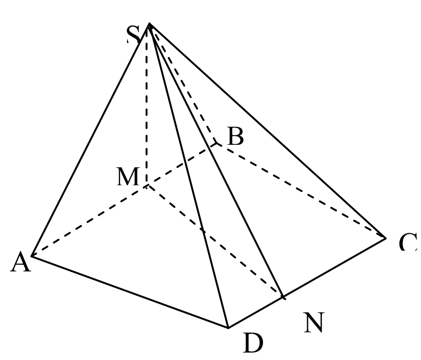
Vì (1) luôn đúng, nên : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ đúng."

Bình luận : *Chứng minh trên đã sử dụng quy tắc suy luận không hợp logic* $\dfrac{P \Rightarrow Q, Q}{P}$

(Sai lầm về mặt luận chứng).

Bài toán 4 : Có tồn tại hay không những hình chóp tứ giác có hai mặt đối diện cùng vuông góc với mặt phẳng đáy ? Giải thích vì sao.

Câu trả lời của một nhóm học sinh lớp 11 tại Thành phố Hồ Chí Minh:



« Giả sử hình chóp SABCD có hai mặt đối diện (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với đáy.

Kẻ đường cao SM của tam giác SAB và đường cao SN của tam giác SDC.

Suy ra, $\widehat{SMN}, \widehat{SNM}$ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SDC) với mặt phẳng đáy (ABCD).

Vì SMN là một tam giác, nên $\widehat{SMN}, \widehat{SNM}$ không thể cùng là góc vuông. Do đó, (SAB) và (SDC) không thể cùng vuông góc với đáy.

Chứng minh tương tự với hai mặt đối diện (SAD) và (SBC)

Kết luận : mệnh đề sai."

Bình luận : *Bài làm có sai lầm về hai phương diện khác nhau.*

– Sai lầm về mặt luận cứ : *Suy luận đã dựa vào một mệnh đề sai* "*Nếu P và Q là hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến a, thì góc giữa P và Q là góc giữa đường thẳng b nằm trong P và vuông góc với a, với một đường thẳng bất kì nằm trong Q và đi qua giao điểm của a và b.*"

– Sai lầm về mặt tiền đề : *Suy luận sai lầm trên dẫn tới hai mệnh đề kết luận sai* "$\widehat{SMN}, \widehat{SNM}$ *lần lượt là góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SDC) với mặt phẳng đáy (ABCD) và đều là góc vuông.". Mệnh đề sai này lại trở thành tiền đề cho bước suy luận tiếp theo "Tam giác SMN có hai góc vuông".*

4.5. Phân loại chứng minh

Một cách tổng quát, có hai loại chứng minh chủ yếu : chứng minh trực tiếp và chứng minh gián tiếp

4.5.1. Chứng minh trực tiếp là chứng minh trong đó ta xuất phát từ tiền đề (giả thiết hay mệnh đề đúng đã biết) để suy ra tính đúng đắn của mệnh đề cần chứng minh, nhờ vào việc áp dụng các quy tắc suy diễn.

Ví dụ 1 : Chứng minh bất đẳng thức Côsi.

Với $\forall a \geq 0, b \geq 0$ ta có :

$$\begin{aligned}(a - b)^2 \geq 0 &\Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0\\ &\Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab\\ &\Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}\\ &\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Ví dụ 2 : Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai.

« Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ và số thực α. Nếu $af(\alpha) < 0$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ và $x_1 < \alpha < x_2$ ».

Chứng minh :

$$\begin{aligned}af(\alpha) < 0 &\Rightarrow a(a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0\\ &\Rightarrow (a\alpha + \frac{b}{2})^2 < \frac{\Delta}{4} \Rightarrow \Delta > 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 tính theo công thức $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Mặt khác : $(a\alpha + \frac{b}{2})^2 < \frac{\Delta}{4} \Rightarrow \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} < a\alpha < \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$

$$\Rightarrow x_1 < \alpha < x_2 \text{ với } x_1 < x_2.$$

4.5.2. Chứng minh gián tiếp

Trong loại chứng minh này, ta lại có các hình thức chứng minh khác nhau dưới đây.

b_1) Chứng minh phản chứng

• Để chứng minh mệnh đề A là đúng (nghĩa là chứng minh $\overline{A}$ là sai), ta giả sử ngược lại A sai (nghĩa là $\overline{A}$ đúng) và chỉ ra rằng việc $\overline{A}$ đúng sẽ dẫn tới mâu thuẫn. Như vậy, $\overline{A}$ phải sai, nghĩa là A đúng.

• Mệnh đề A cần chứng minh thường có dạng:

$$A \equiv P \Rightarrow Q \equiv \overline{P} \vee Q$$

Do đó, $\overline{A} \equiv \overline{P \Rightarrow Q} \equiv P \wedge \overline{Q}$

Như vậy, giả sử A sai (hay $\overline{A}$ đúng) tương đương giả sử P đúng và $\overline{Q}$ đúng (hay Q sai).

Tuy nhiên, trong dạy học toán thông thường ta chỉ viết : Giả sử ngược lại Q sai. Việc P đúng được xem như ngầm ẩn.

Ví dụ 1: «Trong một hình bình hành hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường ».

Kí hiệu: A là mệnh đề « Nếu ABCD là một hình bình hành, thì AC và BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường »

P là mệnh đề « ABCD là một hình bình hành »,

Q là mệnh đề « AC và BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường ».

Như vậy, $A \equiv P \Rightarrow Q$.

Thay vì : "Giả sử ngược lại A sai" hay "Giả sử ngược lại P đúng và $\overline{Q}$ đúng (Q sai)." hay "Giả sử ngược lại ABCD là hình bình hành, nhưng AC và BD không cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường", ta chỉ viết "Giả sử ngược lại, AC và BD không cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường"

Các bước của một chứng minh bằng phản chứng :

- Bước 1 (Giả định) : Giả sử Q sai (nghĩa là $\overline{Q}$ đúng).
- Bước 2 (suy diễn trực tiếp) : Từ các tiền đề P và $\overline{Q}$ ta đi tới một mâu thuẫn.
- Bước 3 : Kết luận : A đúng.

Các kiểu suy luận dẫn tới mâu thuẫn có thể là :

+ $P \wedge \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

+ $P \wedge \overline{Q} \Rightarrow C \wedge \overline{C}$ (C là mệnh đề nào đó).

+ $P \wedge \overline{Q} \Rightarrow Q$.

+ $P \wedge \overline{Q} \Rightarrow S$ (S là mệnh đề sai đã biết).

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với $\forall$a, b không âm.

$$(a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab})$$

- Bước 1 : Giả sử ngược lại $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ sai, nghĩa là ta có $a + b < 2\sqrt{ab}$ đúng.
- Bước 2 : $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge a + b < 2\sqrt{ab} \Rightarrow (a+b)^2 < 4ab \Rightarrow (a-b)^2 < 0$ (vô lí)
- Bước 3 : Kết luận $a + b < 2\sqrt{ab}$ sai, nghĩa là $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ đúng.

Ví dụ 3 : định lí đảo về dấu tam thức bậc hai :

« Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) và một số thực α. Nếu $af(\alpha) < 0$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) và $x_1 < \alpha < x_2$ »

Chứng minh : Giả sử ngược lại, phương trình không có hai nghiệm phân biệt. Từ đó suy ra $\Delta \leq 0$.

$\Delta \leq 0 \Rightarrow af(x) \geq 0$ với $\forall$x. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $af(\alpha) < 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Giả sử ngược lại : α nằm ngoài khoảng hai nghiệm $(x_1, x_2) \Rightarrow af(\alpha) \geq 0$ (trái giả thiết). Vậy, $x_1 < \alpha < x_2$.

■ **Lưu ý** : Việc chứng minh bằng phản chứng mệnh đề $P \Rightarrow Q$ đòi hỏi phải biết cách phủ định mệnh đề Q, đặc biệt khi Q có dạng sau đây :

+ $Q = Q_1 \wedge Q_2$ $\overline{Q} = \overline{Q_1 \wedge Q_2} = \overline{Q}_1 \vee \overline{Q}_2$.

+ $Q = Q_1 \vee Q_2$ $\overline{Q} = \overline{Q_1 \vee Q_2} = \overline{Q}_1 \wedge \overline{Q}_2$.

+ $Q = \forall x, R(x)$ $\overline{Q} = \overline{\forall x, R(x)} = \exists x, \overline{R(x)}$.

+ $Q = \exists x, R(x)$ $\overline{Q} = \overline{\exists x, R(x)} = \forall x, \overline{R(x)}$.

Ví dụ 4 : Cho bài toán « Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$ đạt giá trị bé nhất là 2. »

Bài làm của một học sinh :

"Chứng minh f(x) đạt giá trị nhỏ nhất là 2, ta nghĩ ngay đến mệnh đề phủ định của nó là f(x) không đạt giá trị nhỏ nhất là 2, tức tồn tại x sao cho $f(x) < 2$.

Nhận thấy : $x^2 \pm x + 1 > 0$ với mọi x. Do đó :

$$f(x) < 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 + x^2 - x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}.\sqrt{x^2 - x + 1} < 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}.\sqrt{x^2 - x + 1} < 0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy $f(x) \geq 2$ với mọi x.

$f(x) = 2$ khi $x = 0$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là 2 khi $x = 0$."

Bình luận : *Sai lầm trong việc lấy phủ định của mệnh đề "f(x) đạt giá trị nhỏ nhất là 2".*

b_2) Chứng minh loại dần

Ví dụ 1: Chứng minh rằng phương trình : $3^x + 4^x = 5^x$ có một nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

Giải : $3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$.

– Với x = 2, ta có : $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ đúng. Vậy phương trình có nghiệm x = 2.

– Với x < 2, $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2$ và $\left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2$ (do hàm số $y = a^x$ nghịch biến khi a < 1)

$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

– Với x > 2 (chứng minh tương tự).

Kết luận: Phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất x = 2.

Ví dụ 2 : Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai.

Với tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, có ba trường hợp xảy ra : $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ hay $\Delta > 0$.

– TH1 : $\Delta = 0 \Rightarrow af(x) \geq 0$ với mọi x.

Nhưng theo giả thiết, có α mà $af(\alpha) < 0$. Vậy không thể xảy ra trường hợp này.

– TH2 : $\Delta < 0 \Rightarrow af(x) > 0$ với mọi x.

Nhưng theo giả thiết, có α mà $af(\alpha) < 0$. Vậy cũng không thể xảy ra trường hợp này.

– Từ các kết quả trên suy ra $\Delta > 0$. Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) và,

$af(x) \geq 0$ với $\forall x$ thoả : $x < x_1$ hay $x > x_2$,
$af(\alpha) < 0$ với $\forall x$ thoả : $x_1 < x < x_2$,
$af(\alpha) < 0$ (theo giả thiết) $\Rightarrow x_1 < \alpha < x_2$.

■ **Lưu ý :** Việc sử dụng phương pháp loại dần đòi hỏi phải xem xét thật đầy đủ các trường hợp có thể xảy ra.

b_3) Chứng minh quy nạp

Cho mệnh đề chứa biến P(n) với $n \in Z$. Để chứng minh P(n) đúng với $\forall n \geq a$, a là hằng số thuộc Z, ta làm theo các bước sau :

Bước 1 : Chứng minh rằng P(a) đúng.

Bước 2 : Giả sử P(k) đúng, với $k \geq a$ tuỳ ý, chứng minh P(k + 1) đúng.

Bước 3 : Kết luận P(n) đúng với $\forall n \geq a$.

Phương pháp quy nạp toán học này (gọi tắt là phương pháp quy nạp) đặt cơ sở trên nguyên lí quy nạp đã trình bày trong mục 4.2.

Ví dụ: Chứng minh rằng với $\forall$ $n \geq 3$ ta luôn có

$$2^n > 2n + 1 \ (1).$$

Giải :

– Với n= 3 ta có: $2^3 > 6+1$ đúng. Vậy (1) đúng với n = 3.

– Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 3$, tức là : $2^k > 2k + 1$ đúng (*).

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với n = k + 1, nghĩa là cần chứng minh :

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1 \text{ hay } 2^{k+1} > 2k + 3.$$

Thật vậy, ta có :

$$2^k > 2k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} > 4k + 2 = 2k + 2k + 2 > 2k + 3 \text{ (đpcm).}$$

– Kết luận $2^n > 2n + 1$ với $\forall n \geq 3$.

4.6. Tìm tòi phương pháp chứng minh

Dạy học chứng minh cũng là dạy học giải toán. Do đó, hoạt động tìm tòi chứng minh cũng có những đặc trưng của hoạt động tìm tòi phương pháp giải một bài toán, mà ta sẽ đề cập trong mục D của phần 2.

Ở đây, ta chỉ trình bày một vài phương pháp đặc thù hơn cho hoạt động tìm tòi chứng minh, đó là phương pháp phân tích đi lên và phương pháp phân tích đi xuống.

■ Trong chứng minh trực tiếp, ta phải xuất phát từ tiền đề (giả thiết hay từ mệnh đề đúng đã biết) để suy ra tính đúng đắn của mệnh đề cần chứng minh, nhờ vào việc áp dụng các quy tắc suy diễn.

Ví dụ: Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacopxki. Với mọi a_i và b_i thuộc $\mathbb{R}$, i = 1, …, n ta có :

$$\left(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) \ (*)$$

Chứng minh : Với mọi $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, i = 1, 2, … , n, ta có :

$$(a_1x + b_1)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2 \geq 0 \text{ với } \forall x$$

$$\Rightarrow \left(a_1^2 + ... + a_n^2\right)x^2 + 2\left(a_1b_1 + ... + a_nb_n\right)x + \left(b_1^2 + ... + b_n^2\right) \geq 0,\ \forall x\ (1)$$

– TH1 : Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0 \Rightarrow (*)$ đúng.

– TH2 : Nếu $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0$. Xem vế trái của (1) như tam thức bậc hai, đối số x.

(1) $\Rightarrow \Delta' < 0$

$$\Rightarrow \left(a_1b_1 + ... + a_nb_n\right)^2 - \left(a_1^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + ... + b_n^2\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(a_1b_1 + ... + a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + ... + b_n^2\right)$$

■ **Vấn đề đặt ra là** làm sao phát hiện ra mệnh đề xuất phát ?

Để giải quyết vấn đề này, ta thường sử dụng các phương pháp phân tích sau đây.

4.6.1.Phương pháp phân tích đi lên

Giả sử cần chứng minh mệnh đề T là đúng. Ta làm như sau :

– Xuất phát từ T, xem T có là hệ quả logic của một mệnh đề T_1 nào đó không ($T \Leftarrow T_1$).
  (Ta hay tự hỏi : Muốn chứng minh T ta cần chứng minh cái gì ?).
– Xuất phát từ T_1, xem T_1 có là hệ quả logic của một mệnh đề T_2 nào đó không ($T_1 \Leftarrow T_1$).

(Muốn chứng minh T_1 ta cần chứng minh cái gì ?)

– …

– Cuối cùng đi tới mệnh đề T_n, đã biết là đúng.

Sơ đồ của phân tích đi lên là : $T \Leftarrow T_1 \Leftarrow T_2 \Leftarrow \ldots \Leftarrow T_n$ (đã biết là đúng).

Vì T_n đúng, nên T đúng.

■ Trình bày chứng minh

Phân tích trên cho phép tìm ra mệnh đề T_n đúng đã biết. Từ đó, có thể trình bày lại chứng minh như sau :

$$T_n \Rightarrow T_{n-1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 1: Tìm mệnh đề xuất phát trong chứng minh bất đẳng thức Bunhiacopxki ở trên :

$$\left(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) \text{ (T)}$$

– Để chứng minh T, ta đi chứng minh:

$$\left(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n\right)^2 - \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) \le 0 \ (T_1)$$

– Nhận xét : bất đẳng thức này có dạng : B^2 - AC, dạng định thức Δ’ của một tam thức bậc hai $f(x) = Ax^2 \pm 2Bx + C$. Do đó, để có được (T_1), ta cần chứng minh mệnh đề T_2 sau đây :

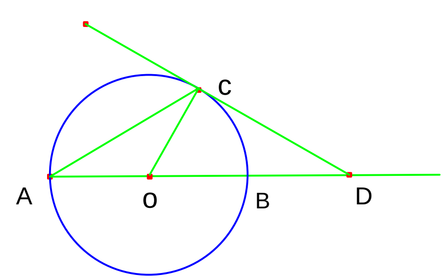
$f(x) = \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)x^2 + 2\left(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n\right)x + \left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) \ge 0 \ \forall x.$

– Để chứng minh T_2, ta cần chứnh minh :

$$(a_1x + b_1)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2 \ge 0 \ \ \forall x \ (T_3).$$

– T_3 là mệnh đề luôn đúng.

Ví dụ 2 : Cho đường tròn tâm O. Dây cung AC và đường kính AB của đường tròn lập thành góc 30°. Tiếp tuyến với đường tròn tại C cắt AB kéo dài tại D. Chứng minh rằng: AC=DC.



• Phân tích:

– Muốn chứng minh AC = DC (T), ta cần chứng minh tam giác ACD cân tại C (T_1)

– Muốn chứng minh tam giác ACD cân tại C, ta cần chứng minh $\widehat{CDA} = 30^0$ (T_2)

– Muốn chứng minh T_2, ta cần chứng minh góc $\widehat{COD} = 60^0$ (T_3)

– Muốn chứng minh T_3, ta cần chứng minh góc $\widehat{ACO} = 30^0$ (T_4)

– Muốn chứng minh T_4, ta cần chứng minh tam giác AOC cân ở O (T_5)

– Muốn chứng minh tam giác AOC cân ở O, ta cần chứng minh AO = OC (T_6 - mệnh đề đúng).

• Trình bày chứng minh :

AO = OC (vì đều là bán kính đường tròn)

$\Rightarrow$ Tam giác AOC cân ở O $\Rightarrow$ $\widehat{ACO} = 30^0$ (vì $\widehat{CAO} = 30^0$ theo giả thiết)

$\Rightarrow$ $\widehat{COD} = 60^0$ (góc ngoài của tam giác cân AOC)

$\Rightarrow$ $\widehat{CDA} = 30^0$ (tam giác OCD vuông ở C, do bán kính OC vuông góc với tiếp tuyến CD)

$\Rightarrow$ Δ ACD cân ở C (vì $\widehat{CAD} = \widehat{CDA} = 30^0$)

$\Rightarrow$ AC = DC (đpcm).

■ **Chú ý**, trong nhiều bài toán, ta có thể đạt được dấu $\Leftrightarrow$ giữa tất cả các mệnh đề T_j và T_{j+1}.

Khi đó, không cần trình bày lại chứng minh.

4.6.2. Phương pháp phân tích đi xuống

Giả sử cần xác định tính đúng, sai của mệnh đề T.

Xuất phát từ T, ta suy luận theo sơ đồ sau:

$$T \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow T_n \text{ (đã biết là đúng hay sai).}$$

– Nếu T_n sai, ta kết luận T sai.

– Nếu T_n đúng, ta chưa kết luận được gì về chân trị của T.

Khi đó, cần kiểm tra sơ đồ ngược lại: $T_n \Rightarrow T_{n-1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T$

Nếu suy luận này đúng, thì kết luận T đúng.

■ Như vậy, phương pháp phân tích đi xuống có thể dùng để bác bỏ một mệnh đề hoặc để tìm ra mệnh đề xuất phát cho chứng minh.

Ví dụ: Xác định chân trị của mệnh đề sau :

« Cho đường tròn tâm O. Hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. M, N lần lượt là trung điểm của AO và OB. CN cắt đường tròn tại I. IM cắt đường tròn tại J. CM cắt đường tròn tại K. Khi đó : $\widehat{CMI} = 90^0$ ».

Giải : $\widehat{CMI} = 90^0$ (T)

$\Rightarrow$ IJ // KD (T_1)

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{JK} = \overset{\frown}{DI}$ (T_2)

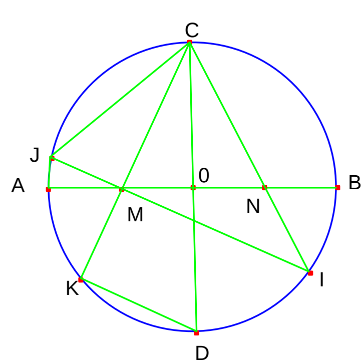
$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{JK} = \overset{\frown}{KD}$

(do KD = ID) (T_3)

$\Rightarrow$ $\widehat{JCK} = \widehat{KCD}$ (T_4)

$\Rightarrow$ Δ JCL cân tại C (T_5)

$\Rightarrow$ JM = ML (T_6)



$\Rightarrow \Delta$ JMA = Δ LMO (T_7)

$\Rightarrow \widehat{JAM} = 90^0$ (T_8)

$\Rightarrow \Delta$AJB có hai góc vuông (sai). (T_9)

Kết luận, mệnh đề trên sai.

Câu hỏi và bài tập

1. Dạy học một tính chất hay một công thức toán học có thuộc về tình huống dạy học định lí không? Vì sao?

2. Phân tích ưu điểm và nhược điểm của từng tiến trình dạy học định lí.

3. Có thể khẳng định rằng ta đã dạy học một định lí nào đó theo phương pháp tích cực nếu ta áp dụng đúng tiến trình Thực nghiệm/ Suy luận hay tiến trình Bài toán $\rightarrow$ Định lí?

4. Trình bày các phương pháp dạy học có thể vận dụng ứng với mỗi tiến trình dạy học định lí đã nêu trong giáo trình.

5. Làm sao phát huy tính tích cực, độc lập của học sinh trong các giờ dạy học về định lí?

6. Xây dựng các phương án khác nhau dạy học các định lí sau:

a) Định lí về phương tích của một điểm đối với đường tròn (Hình học 10, NXB GD 2002).

b) Định lí về dấu của tam thức bậc hai (Đại số 10, NXB GD 2001).

c) Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai (Đại số 10, NXB GD 2001).

d) Định lí cosin trong tam giác (Hình học 10, NXB GD 2001, tr. 45).

e) Định lí 1 về đường thẳng song song với mặt phẳng (Hình học 11, tr. 29, NXB GD 2001).

7. Chọn một định lí thích hợp trong sách giáo khoa và xây dựng một phương án dạy học định lí này theo tiến trình Thực nghiệm/ Suy luận (có thể có sự trợ giúp của công nghệ thông tin).

8. Lấy một ví dụ về chứng minh để minh hoạ về các thành phần trong cấu trúc của chứng minh.

9. Ở bậc THPT có nên và có thể có cơ hội thực hiện yêu cầu "Làm cho học sinh thấy được sự cần thiết phải chứng minh"?

10. Phân tích sự khác biệt giữa Tiền đề và Tiên đề, giữa Tiền đề và Giả thiết.

11. Lấy các ví dụ minh hoạ về các loại chứng minh khác nhau (không trùng với các ví dụ cho trong giáo trình).

12. Phân tích các bài làm sau đây của học sinh, ứng với mỗi bài toán đã cho.

a) Bài toán 1 : Chứng minh rằng nếu

$$\begin{cases} a+b+c>0 & (1) \\ ab+bc+ca>0 & (2) \\ abc>0 & (3) \end{cases} \text{ thì } a>0,\ b>0 \text{ và } c>0.$$

Bài làm của học sinh :

"Do vai trò a, b, c như nhau, nên chỉ cần chứng minh a> 0 là đủ.

Giả sử ngược lại a < 0.

Từ (3) $\Rightarrow$ bc < 0

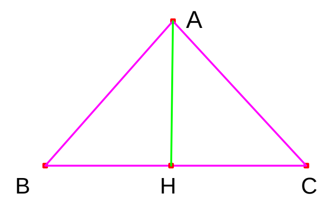
Từ (2) $\Rightarrow$ a(b+c) > -bc > 0 $\Rightarrow$ b + c < 0

Từ a < 0, b+c < 0 $\Rightarrow$ a + b + c < 0 (mâu thuẫn với giả thiết 1). Vậy a > 0."

b) Bài toán 2 : Chứng minh rằng, nếu tam giác ABC thoả mãn a = 2bcosC thì ABC là tam giác cân.

• Bài làm của học sinh 1:

"Kẻ đường cao AH.



a = BC = BH + HC ; BH = c.cosB; CH = b.cosC

$\Rightarrow$ a = c.cosB + b.cosC = 2b.cosC (giả thiết)

$\Rightarrow$ c.cosB = b.cosC $\Rightarrow$ BH = HC

$\Rightarrow$ AH vừa là đường cao vừa là trung tuyến

$\Rightarrow$ Δ ABC cân tại A."

• Bài làm của học sinh 2:

"Giả sử tam giác ABC cân tại A, kẻ đường cao AH, ta có:

$$HC = \frac{a}{2}.$$

Xét tam giác AHC ta có : $\cos C = \dfrac{a}{2b} \Leftrightarrow a = 2b\cos C$.

Vậy nếu tam giác ABC cân ở A thì ta luôn có hệ thức

a = 2bcosC."

• Bài làm của học sinh 3 :

"Giả sử tam giác ABC cân tại A. Lúc đó ta có b = c. Thay vào định lí cosin :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

ta có : $b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\Rightarrow a^2 = 2ab\cos C \Rightarrow a = 2b\cos C$.

Như vậy, giả sử của ta là chấp nhận được, nên bài toán được chứng minh."

• Bài làm của học sinh 4 :

"Theo định lí cosin ta có : $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$ (1)

Nếu b = c, thay b = c vào (1) :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow a^2 = 2ab\cos C \Rightarrow a = 2b\cos C \ (2)$$

Theo (2), ta đã tìm được cạnh b = c, góc ABC = BCA thoả a = 2bcosC. Mà b = c $\Rightarrow$ Δ ABC cân tại A".

c) Bài toán 3: Cho dãy số (b_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2 - b_n} \text{ với } \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy (b_n) bị chặn.

• Bài làm của một sinh viên:

"$b_1 = \dfrac{1}{2}$; $b_2 = \dfrac{2}{3}$; $b_3 = \dfrac{3}{4}$. Dễ nhận thấy rằng : $b_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.

Ta chứng tỏ (b_n) bị chặn trên bởi 2.

Giả sử ngược lại (b_n) không bị chặn trên bởi 2. Khi đó, tồn tại $b_{n0} > 2 \Rightarrow b_{n_0+1} = \dfrac{1}{2 - b_{n_0}} < 0$

(Vô lí, vì $b_n > 0$ với mọi $n \geq 1$). Vậy, (b_n) bị chặn trên bởi $2 \Rightarrow$ Dãy (b_n) bị chặn".

13. Dùng phương pháp phân tích đi lên để tìm cách giải các bài toán sau, sau đó dùng phương pháp tổng hợp để trình bày lại lời giải:

a) Bài toán 1 : « Chứng minh rằng, nếu phương trình $x^2 - (m-2)x + m(m-3) = 0$ có nghiệm dương x_1 thì phương trình $m(m-3)x^2 - (m-2)x + 1 = 0$ có nghiệm dương $1/x_1$. »

b) Bài toán 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, các cạnh góc vuông AB = c và AC = b. M là điểm trên BC. Gọi góc BAM = α. Chứng minh rằng :

$$AM = \frac{bc}{b\cos\alpha + c\sin\alpha}.$$

14. Xét bài toán : « Cho tam giác ABC có đường cao BD và CE. Gọi F là trung điểm của BC. Từ F hạ FG vuông góc với DE. Chứng minh rằng : DG = GE »

a) Dựa vào phương pháp phân tích đi lên hãy xây dựng một hệ thống câu hỏi để hướng dẫn học sinh tìm ra lời giải cho bài toán trên.

b) Trình bày lại lời giải bằng phương pháp tổng hợp.

15. Dùng phương pháp phân tích đi xuống để bác bỏ mệnh đề sau :

« Tồn tại ít nhất một giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x + y + m = 1 \\ xy + mx + my = 1 \end{cases}. »$$

16. Cho các bài toán :

a) Chứng minh rằng, nếu xy = 1 và x > y, thì $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}$

b) Chứng minh rằng nếu : $a_1a_2 = 2(b_1 + b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ và $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ có nghiệm.

Giải các toán trên bằng hai phương pháp chứng minh trực tiếp và chứng minh gián tiếp.

C. Dạy học tri thức phương pháp

Trong các tình huống dạy học khái niệm, định lí hay giải toán có thể đã bao hàm dạy học các tri thức phương pháp. Tuy nhiên, việc dạy học tri thức này một cách độc lập và tường minh (dưới dạng dạy học các quy tắc, phương pháp, …) cũng chiếm một vị trí quan trọng trong chương trình dạy học toán ở trường phổ thông. Hơn nữa, tình huống dạy học này cũng có những nét đặc thù. Chính vì vậy, phần này sẽ dành cho nó một trình bày chi tiết.

1. Khái niệm Thuật toán (algorithme)

• **Theo nghĩa chặt**, "*Thuật toán là một dãy sắp thứ tự các thao tác cần thực hiện trên một số hữu hạn các dữ liệu, và đảm bảo rằng sau một số hữu hạn bước sẽ đạt được kết quả nào đó. Hơn nữa, quy trình này độc lập với các dữ liệu*" (Histoire d'algorithmes. Edition Belin 1994).

Các đặc trưng cơ bản nhất của thuật toán theo nghĩa chặt là:

- Tính hữu hạn: Số bước cần thực hiện, số dữ liệu và cả số thao tác cần làm trong mỗi bước đều phải hữu hạn.
- Tính xác định : thể hiện ở sự rõ ràng, không mập mờ và thực thi được của các thao tác cần thực hiện trong mỗi bước.
- Tính đúng đắn : Với dữ liệu vào cho trước, sau một số hữu hạn các bước được thực hiện thì thuật toán phải đảm bảo đem lại kết quả và kết quả này là duy nhất.

• **Theo nghĩa rộng,** thuật toán là một dãy hữu hạn các bước cần thực hiện theo một thứ tự nhất định để giải quyết một kiểu nhiệm vụ nào đó.

Như vậy, trong một thuật toán theo nghĩa rộng, dãy các bước cần thực hiện có thể không mang đủ các đặc trưng đã nêu ở trên của thuật toán theo nghĩa chặt. Cụ thể hơn,

- Mỗi chỉ dẫn trong một bước có thể chưa mô tả một cách xác định hành động cần thực hiện.
- Có thể có những bước không thực thi được.
- Kết quả thực hiện mỗi bước có thể không duy nhất (không đơn trị).
- Việc thực hiện hết một dãy hữu hạn các bước không đảm bảo chắc chắn đem lại kết quả.

• Hiện nay, trong tin học, từ "thuật toán" được hiểu theo nghĩa chặt. Nhưng trong toán học lại thường được hiểu theo nghĩa rộng.

Trong giáo trình này, ta cũng sử dụng thuật ngữ "thuật toán' theo nghĩa rộng.

Ví dụ về thuật toán theo nghĩa chặt : Thuật toán Ơclide tìm USCLN của hai số tự nhiên a và b.

B1 : So sánh a và b. Nếu a = b thì kết luận USCLN = a = b. Nếu sai, qua bước 2.

B2 : Lấy số lớn trừ đi số nhỏ, ta được một hiệu số.

B3 : Lấy số nhỏ và hiệu số trên làm hai số a và b mới rồi quay về bước 1.

Rõ ràng rằng quy trình này kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Chú ý. Thuật toán này dựa trên tính chất :

«Với hai số tự nhiện a, b và a> b, ta có : d = (a,b) = (a-b,b) »

Ở trường phổ thông, ta đã vận dụng nhiều thuật toán theo nghĩa chặt, như : thuật toán giải phương trình bậc nhất một ẩn, thuật toán giải phương trình bậc hai một ẩn bằng định thức Δ, thuật toán giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng công thức Crame, …

Ví dụ về thuật toán theo nghĩa rộng:

Ví dụ 1 : Quy tắc xét tính chẵn lẻ của hàm số y = f(x) cho bằng biểu thức giải tích f(x).

– Bước 1 : Tìm miền xác định D của f(x).
– Bước 2 : Xét xem D có là tập đối xứng không.
  + Nếu đúng, chuyển sang bước 2.
  + Nếu sai, kết luận hàm số f(x) không chẵn, cũng không lẻ.
– Bước 2 : Tính f(-x).
– Bước 3 : Xét xem f(-x) = f(x) với $\forall x \in D$ hay không.
  + Nếu đúng, thì kết luận f(x) là hàm số chẵn.
  + Nếu sai, chuyển sang bước 4.
– Bước 4 : Xét xem f(-x) = -f(x) với $\forall x \in D$ hay không.
  + Nếu đúng, thì kết luận f(x) là hàm số lẻ.
  + Nếu sai, kết luận hàm số f(x) không chẵn, không lẻ.

Rõ ràng, trong bước 3, không có một chỉ dẫn rõ ràng nào cho biết làm thế nào để biết f(-x) = f(x) với $\forall x \in D$ hay không. Vì thế, có nhiều trường hợp bước này không thực thi được. Nghĩa là, ta không giải được bài toán đặt ra.

Ví dụ 2: Phương pháp giải bài toán bằng cách lập phương trình.

– Bước 1 : Chọn ẩn số. Đặt điều kiện cho ẩn số. Biểu diễn các đại lượng chưa biết qua ẩn số và những đại lượng đã biết.
– Bước 2 : Lập phương trình thể hiện mối liên hệ giữa các đại lượng.
– Bước 3 : Giải phương trình.
– Bước 4 : Kiểm tra kết quả, lời giải.

Viêc thực hiện bước 1 không cho kết quả duy nhất, vì có thể có nhiều phương án chọn ẩn khác nhau và do đó các phương trình đạt được trong bước 2 cũng sẽ không giống nhau.

2. Khái niệm phương pháp

Phương pháp chỉ cách thức cần thực hiện để giải quyết một kiểu nhiệm vụ nào đó.

Ta phân biệt hai loại phương pháp :

– Phương pháp có tính thuật toán.
– Phương pháp tìm đoán.

2.1. Phương pháp có tính thuật toán: là phương pháp có đặc trưng của một thuật toán (theo nghĩa rộng).

2.2. Phương pháp tìm đoán

Ở trường phổ thông, không phải lúc nào ta cũng tìm được các phương pháp có tính thuật toán để giải quyết các vấn đề. Chẳng hạn, ta không thể có được thuật toán giải các phương trình lượng giác phức tạp (phương trình không thuộc dạng cơ bản đã học).

Khi đó, việc nắm được một số chỉ dẫn hay một số lời khuyên "có lí" có thể cho phép tìm ra lời giải bài toán đặt ra, vì những chỉ dẫn và lời khuyên này có thể gợi ra những ý tưởng, những định hướng hợp lí cho việc tìm kiếm lời giải. Trong trường hợp này, ta nói rằng ta đã vận dụng phương pháp có tính chất tìm đoán (hay ngắn gọn là phương pháp tìm đoán).

Ngay cả trong trường hợp một dạng toán có thuật toán giải nhưng chưa được khám phá, thì việc tìm kiếm thuật toán này cũng thường phải vận dụng phương pháp tìm đoán.

Một số phương pháp tìm đoán thường dùng như : quy lạ về quen, tương tự hoá, …

Một ví dụ khác: Phương pháp giải phương trình lượng giác phức tạp.

Tìm cách đưa phương trình về dạng cơ bản bằng cách lưu ý các điểm sau:

- Nếu trong phương trình có nhiều loại góc khác nhau thì chọn góc thích hợp và thử đưa các góc khác về góc đã chọn.
- Nếu phương trình chứa nhiều loại hàm số lượng giác thì thử giảm số các hàm số này. Chẳng hạn đưa tgx và cotgx về sinx, cosx hay ngược lại.
- Nếu phương trình chứa biểu thức bậc cao thì thử hạ bậc biểu thức này.
- Thử biến đổi phương trình về dạng tích.
- Nếu các cách làm trên không mang lại kết quả, hay phương trình có hình thức quá đặc biệt, thử dùng các phương pháp đặc biệt như Đối chứng, Đoán nghiệm và chứng minh duy nhất, Đồ thị, Tam thức bậc hai, …

3. Tri thức phương pháp

Trong nhiều loại tri thức[19], ta quan tâm đặc biệt đến hai dạng tri thức sau:

- Tri thức sự vật (một khái niệm, một định lí, một yếu tố lịch sử, …).
- Tri thức phương pháp : là tri thức về phương pháp tiến hành giải quyết một kiểu nhiệm vụ nào đó.

Như vậy, tri thức phương pháp luôn gắn liền với hai loại phương pháp khác nhau về bản chất : Phương pháp có tính thuật toán và phương pháp tìm đoán.

Từ nay, để tiện lợi, ta nói ngắn gọn là *tri thức phương pháp có tính thuật toán* và *tri thức phương pháp tìm đoán*.

[19] Tham khảo Nguyễn Bá Kim (2004) trang 49-50.

4. Tầm quan trọng của việc dạy học tri thức phương pháp

Châm ngôn Pháp có câu[20] : Văn hoá là cái gì còn lại sau khi chúng ta đã quên đi những những điều học hỏi được.

Ta cũng thường nói : Phương pháp là cái gì còn lại sau khi chúng ta đã quên đi những kiến thức đã học.

Nghĩa bóng của các phát biểu này nói lên vai trò không thể thiếu của tri thức phương pháp trong học vấn của học sinh, cũng như mục đích chủ yếu của dạy học nói chung, đó là dạy học phương pháp.

Vì tri thức phương pháp luôn gắn liền với hai loại phương pháp khác nhau : Phương pháp có tính thuật toán và phương pháp tìm đoán. Do vậy, dạy học tri thức phương pháp vừa là cơ hội tốt để phát triển ở học sinh một loại hình tư duy quan trọng - tư duy thuật toán, vừa cho phép phát triển ở họ các năng lực và phẩm chất tư duy độc lập và sáng tạo.

Theo Nguyễn Bá Kim (2004), phương thức tư duy thuật toán thể hiện ở những hoạt động sau :

– Thực hiện những hoạt động theo một trình tự xác định phù hợp với một thuật giải cho trước.
– Phân tích một hoạt động thành những hoạt động thành phần được thực hiện theo một trình tự xác định.
– Mô tả chính xác quá trình tiến hành một hoạt động.
– Khái quát hoá một hoạt động trên những đối tượng riêng lẻ thành một hoạt động trên một lớp đối tượng.
– So sánh những con đường khác nhau cùng thực hiện một công việc và phát hiện con đường tối ưu.

Cũng theo Nguyễn Bá Kim (2004), phát triển tư duy thuật toán trong nhà trường phổ thông là cần thiết vì các lí do sau đây :

– Tư duy thuật toán giúp học sinh hình dung được việc tự động hoá trong những lĩnh vực hoạt động khác nhau của con người, góp phần khắc phục sự ngăn cách giữa nhà trường và xã hội tự động hoá. Nó giúp học sinh thấy được nền tảng của việc tự đông hoá, cụ thể là nhận thức rõ đặc tính hình thức, thuần tuý máy móc của quá trình thực hiện thuật toán, đó là cơ sở cho việc chuyển giao một số chức năng của con người cho máy thực hiện.

– Tư duy thuật toán giúp học sinh làm quen với cách làm việc trong khi giải bài toán bằng máy tính điện tử. Vì thiết kế thuật toán là một khâu rất cơ bản của việc lập trình. Tư duy thuật toán tạo điều kiện cho học sinh thực hiện tốt khâu này.

– Tư duy thuật toán giúp học sinh học tập tốt những môn học ở nhà trường phổ thông, rõ nét nhất là môn Toán.

[20] Trích dẫn lại từ "Tâm lí học và Giáo dục học – J.Piaget, bản dịch tiếng việt và bình luận của Trần Nam Lương và Lê Đình Phi, NXB GD 1997, trang 32).

– Tư duy thuật toán cũng góp phần phát triển những năng lực trí tuệ chung như phân tích, tổng hợp, khái quát hoá,… và hình thành những phẩm chất của người lao động mới như tính ngăn nắp, kỉ luật, tính phê phán và thói quen tự kiểm tra v,v, …

Chú ý : Dạy học tri thức phương pháp có tính thuật toán không bó hẹp trong việc dạy học vận dụng các thuật toán đã biết, mà bao hàm cả dạy học khám phá thuật toán, phân tích đánh giá các thuật toán, tìm thuật toán tối ưu, … Do đó, dạy học tri thức phương pháp có tính thuật toán và tri thức phương pháp tìm đoán đều góp phần rèn luyện các thao tác tư duy (phân tích, tổng hợp, so sánh, …) và phát triển các phẩm chất tư duy (tính độc lập, tính linh hoạt, tính phê phán,…), chứ không phải tạo ra ở học sinh tính rập khuôn máy móc như một số người thường lo ngại.

5. Dạy học tri thức phương pháp

5.1. Các cấp độ khác nhau về dạy học tri thức phương pháp

a) Dạy học một cách tường minh tri thức phương pháp

Trong trường hợp này, tri thức phương pháp là đối tượng trung tâm của một tình huống dạy học cụ thể và kết quả là tri thức này *được trình bày một cách tổng quát và tường minh dưới dạng một quy tắc, một thuật toán, một danh sách các lời khuyên hay chỉ dẫn, ...*

Ta thường áp dụng cấp độ này đối với các tri thức phương pháp có tính thuật toán, được quy định rõ ràng trong chương trình, sách giáo khoa, như :

– Quy tắc tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0.

– Phương pháp giải và biện luận phương trình một ẩn $ax + b = 0$.

– Phương pháp xét dấu của một tam thức bậc hai.

b) Thông báo tường minh tri thức phương pháp trong quá trình hoạt động

Khác với cấp độ trên, ở đây, tri thức phương pháp không là đối tượng chủ yếu của một tình huống dạy học cụ thể, mà chỉ được thông báo trong quá trình dạy học. Thông báo này có thể được lặp lại trong nhiều cơ hội khác nhau, ở những thời điểm khác nhau.

Cấp độ này thường được áp dụng với các tri thức phương pháp không được quy định rõ ràng trong chương trình, sách giáo khoa (chủ yếu là các tri thức phương pháp tìm đoán).

Ví dụ 1 : Giáo viên có thể truyền thụ phương pháp giải toán « *Quy lạ về quen* » bằng cách nhấn mạnh và thông báo một cách rõ ràng cho học sinh phương pháp này thông qua những cơ hội khác nhau. Chẳng hạn, khi thực hiện việc chứng minh :

– Tổng các góc trong của một tứ giác bằng 2π bằng cách đưa về trường hợp « tổng các góc trong của tam giác ».

– Định lí sin trong tam giác bằng cách đưa về trường hợp tam giác vuông, …

Ví dụ 2 : Tri thức phương pháp về giải phương trình lượng giác phức tạp « *Nếu phương trình chứa các biểu thức lượng giác bậc cao thì có thể tính đến việc hạ bậc của các biểu thức này* » có thể được thông báo rõ ràng nhân cơ hội giải các phương trình dạng này, như :

$$\sin 3x + \sin^3 x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x \;;$$

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2 \;;$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 - \cos 6x}{4}\ ;$$

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(tgx + \cot gx)\ .$$

c) Truyền thụ ngầm ẩn thông qua việc tập luyện những hoạt động ăn khớp với tri thức phương pháp

Trong trường hợp này, tri thức phương pháp *không được trình bày một cách tổng quát và tường minh dưới dạng một quy tắc, một thuật toán, nó cũng không được thông báo một cách rõ ràng trong quá trình hoạt động*. Học sinh lĩnh hội nó một cách ngần ẩn, nhờ vào việc thực hiện nhiều hoạt động tương thích với một chiến lược, một định hướng giải quyết chung. Nói cách khác, đó là những hoạt động ăn khớp với tri thức phương pháp này. Như vậy, mức độ hoàn chỉnh của tri thức rất khác nhau ở mỗi học sinh, vì nó hiện diện ở học sinh như một kinh nghiệm mà tự họ rút ra được từ nhiều trường hợp hoạt động khác nhau.

Như vậy, cách thức này có thể áp dụng cho cả tri thức phương pháp được quy định rõ ràng hay chỉ ngầm ẩn trong chương trình, sách giáo khoa.

Để học sinh lĩnh hội tốt hơn tri thức phương pháp dưới hình thức này, giáo viên thường tổ chức các hoạt động theo một mục đích xác định trước, chứ không tuỳ tiện.

Ví dụ 1 : Học sinh có thể lĩnh hội được tri thức phương pháp có tính chất tìm đoán ở trong ví dụ 2 (mục b), nếu giáo viên cố tình cho họ giải nhiều bài toán dạng này với cùng một định hướng « hạ bậc các biểu thức lượng giác bậc cao », nhưng không thông báo tường minh tri thức đó.

Ví dụ 2 : Trong sách giáo khoa Đại số 10, NXB GD 2001, phương pháp xét tính chẵn lẻ của hàm số y = f(x) (nghĩa là cách thức tiến hành hoạt đông nhận dạng hàm số chẵn, lẻ) chưa được trình bày rõ ràng dưới dạng một thuật toán.

Dạy học tri thức phương pháp này có thể được thực hiện theo cấp độ a, nghĩa là nó được trình bày dươi dạng một dãy hữu hạn các bước cần thực hiện (chẳng hạn như trong ví dụ 1, mục 1).

Nếu áp dụng cấp độ c, phương pháp xét tính chẵn lẻ không được trình bày một cách tổng quát và tường minh. Nó chỉ hiện diện ngầm ẩn qua một số các ví dụ cụ thể trong đó việc xét tính chẵn lẻ của hàm số luôn được thực hiện theo cùng quy trình. Chẳng hạn :

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = -2x^4 + 2x^2 + 1$.

Giải :

– Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

– Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có $-x \in \mathbb{R}$.

– Ta có,

$$f(-x) = -2(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -2x^4 + 2x^2 + 1 = f(x).$$

Vậy f(x) là hàm số chẵn.

5.2. Một số tiến trình dạy học tri thức phương pháp có tính thuật toán một cách tường minh

a) Tiến trình suy diễn

Bước 1 : Trình bày bài toán[21] tổng quát T cần giải quyết.

Bước 2 : Tìm kiếm và trình bày phương pháp để giải T.

Bước 3 : Ví dụ minh hoạ, luyện tập củng cố phương pháp.

Trong tiến trình này, trước hết là khám phá phương pháp giải cho trường hợp tổng quát (tri thức phương pháp cần truyền thụ), sau đó mới áp dụng vào các trường hợp riêng, nghĩa là đi từ trường hợp tổng quát đến các trường hợp đơn lẻ.

Để phát huy tính tích cực của học sinh, giáo viên nên tổ chức cho họ tự thực hiện các bước 2 và 3. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, ở bước 2, giáo viên bỏ qua giai đoạn tìm kiếm phương pháp mà giới thiệu trực tiếp ngay phương pháp này.

Ví dụ : Bài « Sơ lược về hệ phương trình lược giác một ẩn » (Đại số và Giải tích 11, NXB GD 2001).

Từ phân tích chương trình và sách giáo khoa, ta rút ra mục đích yêu cầu của bài học là : cho học sinh làm quen với một vài phương pháp giải một số hệ phương trình lượng giác cơ bản.

Như vậy, bản chất của tình huống là: dạy học tri thức phương pháp có tính thuật toán.

• Bước 1. Giáo viên trình bày bài toán tổng quát cần giải quyết : «Giải một số hệ phương trình lượng giác một ẩn đơn giản».

• Bước 2. Giáo viên giới thiệu hai phương pháp giải :

+ Phương pháp 1 :

- Chọn giải 1 phương trình đơn giản nhất.
- Thế các nghiệm đã tìm được (nếu có) vào các phương trình còn lại để xác định nghiệm của hệ. Nếu nghiệm nào thoả mãn tất cả các phương trình còn lại này, thì đó là nghiệm của hệ, nếu không thì loại.

+ Phương pháp 2 :

- Giải tất cả các phương trình có mặt trong hệ.
- Tìm tất cả các nghiệm chung của mọi phương trình của hệ. Đó chính là các nghiệm của hệ.

• Bước 3 : Ví dụ áp dụng và luyện tập phương pháp.

1. Giải hệ phương trình sau bằng hai phương pháp đã nêu :

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases}$$

2. Chọn phương pháp thích hợp để giải các hệ phương trình sau :

[21] Thuật ngữ bài toán vẫn được hiểu theo nghĩa rộng như ở chương trước.

a) $\begin{cases} 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \\ 4\sin^3 x - 5\sin x + 2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos(4x - \dfrac{\pi}{3}) = 1 \\ \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

b) Tiến trình quy nạp

• Bước 1 : Giải một số bài toán cụ thể cùng dạng.

• Bước 2 : Nhận xét phương pháp chung thể hiện trong lời giải các bài toán trên.

Từ đó, nêu bài toán tổng quát T và phương pháp giải T.

• Bước 3 : Củng cố, luyện tập phương pháp qua việc giải các bài tập cụ thể khác thuộc dạng T.

Hoặc, một biến thể khác :

• Bước 1. Trình bày bài toán tổng quát T cần giải quyết.

• Bước 2 : Giải một số bài toán cụ thể thuộc dạng T.

• Bước 3 : Nhận xét phương pháp chung thể hiện trong lời giải các bài toán trên.

Từ đó, nêu phương pháp tổng quát để giải T.

• Bước 4 : Củng cố, luyện tập phương pháp qua việc giải các bài tập cụ thể khác thuộc dạng T.

Như vậy, phương pháp giải bài toán tổng quát (tri thức phương pháp cần truyền thụ) được khái quát hoá từ phương pháp giải một số bài toán cụ thể. Nói cách khác, tiến trình này đi từ các trường hợp riêng lẻ đến trường hợp tổng quát.

Ví dụ : Dạy học tri thức phương pháp về giải phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

• Bước 1. Giáo viên nêu bài toán cần giải quyết : « Giải phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác ».

• Bước 2. Đề nghị học sinh giải các phương trình sau :

$\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$;

$2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x - 2 = 0$;

$\cot g^2 3x - \cot g 3x - 2 = 0$.

• Bước 3. Giáo viên hướng dẫn học sinh nhận xét các lời giải trên để rút ra điểm chung trong phương pháp giải và nêu phương pháp tổng quát để giải dạng phương trình này.

– Đặt hàm số lượng giác đã cho bằng ẩn phụ t (chẳng hạn sinx = t, cotg3x = t, …).

– Đặt điều kiện cho t (nếu có).

– Đưa phương trình ban đầu về phương trình ẩn t.

– Giải phương trình theo t.

– Kiểm tra điều kiện để loại một số giá trị t tìm được.

– Giải phương trình theo x với các giá trị tương ứng của t.

• Bước 4. Học sinh tiếp tục giải các phương trình sau :

$$\sqrt{3}tg^2x-(1+\sqrt{3})tgx+1=0\ ;$$

$$2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 1 = 0\ ;$$

$$\cos^2 x + \sin x + 1 = 0.$$

5.3. Dạy học tri thức phương pháp tìm đoán

Nói chung, sách giáo khoa không phải là nơi trình bày một cách rõ ràng các phương pháp có tính tìm đoán. Nói cách khác, tri thức này không phải là đối tượng dạy học tường minh. Chính vì thế, việc truyền thụ nó thường được phó thác cho bản thân người giáo viên.

Thực tế dạy học cho thấy, không ít giáo viên đã không ý thức được về trách nhiệm phải truyền thụ tri thức phương pháp tìm đoán, hoặc không biết truyền thụ nó thế nào.

Chẳng hạn, với bài « Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx » (Đại số và Giải tích 11, NXB GD 2001) : $a\sin^2x + b\sin x\cos x + c.\cos^2x = d$ (1), thì mục tiêu dạy học chủ yếu là truyền thụ hai tri thức phương pháp có tính thuật toán sau đây.

Phương pháp đưa về tgx :

• Xét trường hợp $\cos x \neq 0$ (tức là : $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$) :

– Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2x$ để có được một phương trình bậc hai (hay bậc nhất) theo tgx.

– Giải phương trình theo tgx từ đó tìm x.

• Xét trường hợp $\cos x = 0$ (tức là : $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$) : Thay trực tiếp $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ vào phương trình (1) xem nó có phải là nghiệm của phương trình hay không.

Phương pháp đưa về phương trình bậc nhất đối với sin2x và cos2x :

• Dùng các công thức hạ bậc : $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ và công thức $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ để đưa phương trình về dạng quen thuộc $A\sin 2x + B\cos 2x = C$ (2).

• Giải phương trình (2).

Tuy nhiên, nếu có ý thức về việc truyền thụ tri thức phương pháp tìm đoán, thì đây cũng là cơ hội thực hiện việc này. Cụ thể, thông qua quá trình tìm kiếm lời giải cho dạng phương trình : $a\sin^2x + b\sin x\cos x + c.\cos^2x = d$ có thể rút ra và nhấn mạnh trên hai định hướng phương pháp sau :

– Nếu phương trình chứa các biểu thức bậc cao, thì có thể tính đến việc hạ bậc các biểu thức này.

– Nếu phương trình chứa nhiều loại hàm số lượng giác, thì có thể biến đổi làm giảm bớt số hàm số lượng giác (trong ví dụ trên, ta đã đưa phương trình chứa hai hàm số sinx và cosx về chỉ còn chứa tgx).

Các tri thức phương pháp tìm đoán này sẽ được vận dụng và củng cố khi dạy học bài « Những phương trình lượng giác khác » (xem ví dụ trong mục 2.2).

Chú ý : Ta cũng có thể dạy học tri thức phương pháp tìm đoán một cách tường minh, dù nó không được nêu lên rõ ràng trong sách giáo khoa. Trong trường hợp này, một bảng danh sách các lời khuyên hay chỉ dẫn sẽ được thiết lập (theo con đường quy nạp hay suy diễn, tương tự như dạy học tri thức phương pháp có tính thuật toán).

Câu hỏi và bài tập

1. Có thể xem phương pháp dạy học một khái niệm theo con đường quy nạp như là một thuật toán không ?

2. Dạy học cách thức tiến hành dạy học một định lí toán học có là một tình huống dạy học tri thức phương pháp không ?

3. Dạy học tri thức phương pháp như thế nào thì mới đảm bảm các đặc trưng của phương pháp dạy học tích cực ?

4. Ngoài tri thức phương pháp có tính thuật toán quy định trong chương trình và sách giáo khoa, có cần thiết phải truyền thụ cho học sinh các tri thức phương pháp khác hay không ?

5. Phân tích các ý kiến sau :

- Dạy học tri thức phương pháp và dạy học tri thức sự vật đều có tầm quan trọng ngang nhau và không thể tách rời nhau.
- Dạy học nhận dạng một khái niệm là tình huống dạy học tri thức phương pháp.
- Dạy học tri thức phương pháp có tính thuật toán theo tiến trình quy nạp luôn đảm bảo các đặc trưng của phương pháp dạy học tích cực.
- Dạy học tri thức phương pháp có tính thuật toán sẽ tạo ra ở học sinh kiểu tư duy rập khuôn, máy móc, không linh hoạt.
- Dạy học tri thức phương pháp không tạo điều kiện phát triển ở học sinh các năng lực trí tuệ chung như phân tích, so sánh, tổng hợp, khái quát hoá, … và các phẩm chất tư duy như tính linh hoạt, tính phê phán, tính sáng tạo, …

6. Cho ví dụ về ba cấp độ dạy học tri thức phương pháp (khác với các ví dụ đã nêu trong giáo trình).

7. Xây dựng một tiến trình dạy học các nội dung sau :

- Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx (Đại số và Giải tích 11, NXB GD 2001, tr. 66).
- Các dạng vô định (Đại số và Giải tích 11, NXB GD 2001, tr. 126).
- Phương pháp quy nạp toán học.

8. Có thể dạy học tri thức phương pháp về chứng minh hai đường thẳng song song trong không gian ở thời điểm nào? Hãy xây dựng một tiến trình dạy học tri thức phương pháp này.

D. Dạy học giải các bài toán

1. Khái niệm bài tập, bài toán

Phân biệt một cách rõ nét hai khái niệm Bài toán và Bài tập là một việc khá khó khăn và phức tạp. Do đó, hiện nay đang có nhiều quan niệm khác nhau về các khái niệm này. Sau đây là ba quan niệm chủ yếu thể hiện qua những đoạn trích tương ứng.

Quan niệm thứ nhất xem bài tập là một trường hợp riêng của bài toán.

Bài toán là "*tất cả những câu hỏi cần giải đáp về một kết quả chưa biết cần tìm bắt đầu từ những một số dữ kiện, hoặc về phương pháp cần khám phá, mà theo phương pháp này sẽ đạt được kết quả đã biết*" (Từ điển « Petit Robert »).

"***Bài toán**. **1**. Câu hỏi cần giải đáp bằng các phương pháp logic, hợp lí trong lĩnh vực khoa học. **2**. Bài tập ở học đường, đó là tìm các câu trả lời cho một câu hỏi đặt ra, bắt đầu từ các dữ kiện đã biết* " (Le petit Larousse, 1999).

Theo trích đoạn thứ hai, trong phạm vi trường học bài toán được hiểu là một bài tập.

Quan niệm thứ hai xem bài toán là trường hợp riêng của bài tập.

"*Một bài toán (toán học) là một bài tập nghiên cứu (exercice de recherche), mà đối với người muốn giải quyết nó, đó là một thách thức. Nó đòi hỏi những năng lực và khả năng hiểu và vận dụng những kiến thức vào những tình huống mới lạ* " (J. Bair, 2000).

Quan niệm thứ ba phân biệt hai khái niệm bài tập và bài toán.

"*Tuy nhiên, cũng cần có sự phân biệt giữa bài tập và bài toán. Để giải* bài tập *chỉ cần yêu cầu áp dụng máy móc các kiến thức, quy tắc hay thuật toán đã học. Nhưng đối với* bài toán, *để giải được, phải tìm tòi, giữa các kiến thức có thể sử dụng và việc áp dụng để xử lí tình huống còn có một khoảng cách, vì các kiến thức đó không dẫn trực tiếp đến phương tiện xử lí thích hợp. Muốn sử dụng được những điều đã biết, cần phải kết hợp, biến đổi chúng, làm cho chúng thích hợp với tình huống* " (Trần Thúc Trình, 2003).

Tài liệu này được biên soạn dựa vào quan niệm thứ nhất. Như vậy, trong phạm vi dạy học toán, ta đồng nhất hai khái niệm bài toán và bài tập. Tuy nhiên, cũng cần lưu ý rằng, khi đó, một bài tập hay bài toán theo nghĩa của tác giả Trần Thúc Trình, hoặc một bài toán theo nghĩa của nhóm Didactic toán nói trên đều được xem là bài toán.

2. Phân loại các bài toán

Không có một hệ thống phân loại duy nhất các bài toán. Sau đây, ta trình bày một vài kiểu phân loại khác nhau với mục đích làm rõ hơn đặc trưng của bài toán.

2.1. Bài toán có thuật toán giải và bài toán không có thuật toán giải tổng quát

a) Bài toán có thuật toán giải tổng quát

Phần lớn các bài toán trong chương trình toán phổ thông đều thuộc dạng có thuật toán giải tổng quát, như phương trình bậc nhất một ẩn hay hai ẩn ; phương trình bậc 2; phương trình trùng phương; phương trình vô tỉ dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$; khảo sát hàm số bậc 3 ; …

Việc nắm vững cách giải và rèn luyện kĩ năng giải dạng toán này đóng một vai trò cơ bản trong dạy học toán ở trường THPT. Ngoài những lợi ích khác, nó cho phép rèn luyện tư duy thuật toán cho học sinh. Đó là một loại hình tư duy quan trọng, cần thiết trong hoạt động của con người, nhất là trong thời đại mà công nghệ thông tin, tự động hoá đã và đang xâm nhập vào trong mọi lĩnh vực của đời sống xã hội.

Tuy nhiên, việc phát triển ở học sinh năng lực tư duy sáng tạo đòi hỏi phải thoát ra khỏi kiểu học tập trong đó học sinh chỉ biết áp dụng một cách máy móc các thuật toán đã biết. Nói cách khác, hoạt động tìm tòi chính thuật toán giải phải đóng vai trò trung tâm trong hoạt động giải toán.

Quan điểm này dẫn tới một **phân loại chi tiết hơn** các bài toán trong dạng này :

– Các bài toán có thuật toán giải tổng quát đã biết.
– Các bài toán có thuật toán giải tổng quát, nhưng chưa được khám phá.
– Các bài toán mà các thuật toán đã biết tỏ ra kém hiệu quả (cho lời giải dài, phức tạp, …), còn thuật toán hiệu quả hơn chưa được khám phá.

• Bài toán thuộc dạng mà thuật toán giải chưa được khám phá:

Một bài toán cần giải có thể thuộc một dạng nào đó có thuật toán giải tổng quát. Nhưng ở thời điểm trước khi thuật toán này được khám phá, thì đó vẫn là một bài toán mới, mà việc giải nó đòi hỏi phải tư duy một cách sáng tạo.

Chẳng hạn, trước khi thuật toán giải phương trình bậc ba tổng quát được khám phá bởi nhà bác học Cardano (Jérôme Cardan – theo cách gọi của người Pháp), thì việc tìm nghiệm của các phương trình bậc ba là bài toán lôi cuốn sự quan tâm của nhiều nhà toán học và là động cơ của nhiều phát minh trong lịch sử toán học.

Nghiên cứu lịch sử phát triển của toán học đã chứng tỏ rằng : hoạt động khám phá những thuật toán mới hình thành nên một phần chủ yếu của lịch sử của toán học.

Như vậy, ngay cả đối với những dạng toán đã có thuật toán giải trong chương trình toán phổ thông, cũng cho phép rèn luyện tư duy độc lập và sáng tạo cho học sinh, nếu giáo viên không cung cấp sẵn các thuật toán này, mà tổ chức cho họ tự tìm tòi ra thuật toán đó. Nói cách khác, cần thoát khỏi mô hình truyền thống :

– Giáo viên trình bày thuật toán giải tổng quát,
– Cho ví dụ minh hoạ,
– Yêu cầu học sinh làm các bài tập vận dụng trực tiếp thuật toán vừa cung cấp.

• Các bài toán mà thuật toán giải đã biết tỏ ra kém hiệu quả cho phép phát triển các phẩm chất tư duy : tính linh hoạt, tính sáng tạo và đặc biệt là tính phê phán.

Chẳng hạn, ở lớp 9 học sinh đã biết hai phương pháp giải một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn số : Phương pháp thế và phương pháp cộng đại số. Tuy nhiên, ở lớp 10, hai thuật toán này tỏ ra kém hiệu quả khi giải quyết bài toán giải và biện luận các hệ phương trình có tham số. Nhu cầu này dẫn tới khám phá thuật toán mới (phương pháp định thức).

b) Bài toán không có thuật toán giải tổng quát

Hoạt động giải các bài toán dạng này cho phép học sinh có được những sản phẩm tư duy thể hiện tính sáng tạo, tính mới mẻ. Tính mới mẻ ở đây thể hiện ở năng lực phát hiện vấn đề mới, tìm ra hướng đi mới, tạo ra kết quả mới.

2.2. Bài toán mở, bài toán đóng

Theo G. Arsac, G. Germain và M. Mante (1988)[22], bài toán mở là bài toán có các đặc trưng sau :

a) Bài toán không có gợi ý về phương pháp cũng như không có gợi ý về lời giải hay kết quả. Nói cách khác điều phải khẳng định không được nêu lên một cách tường minh trong bài toán. Do đó, bài toán không có câu hỏi kiểu «chứng minh rằng …». Bài toán không quy về áp dụng trực tiếp những thuật toán hay thủ thuật giải đã biết (đặc trưng về đề toán)

b) Để giải được bài toán, phải tiến hành các thao tác thực nghiệm, như mò mẫm, dự đoán và thử nghiệm (đặc trưng về cách giải).

c) Bài toán có phát biểu ngắn và dễ hiểu và thuộc về một lĩnh vực nhận thức quen thuộc đối với học sinh (đặc trưng sư phạm). Đặc trưng này nhằm đảm bảo rằng học sinh dễ dàng nắm được tình huống, và có thể tiến hành được các phép thử.

Ta gọi bài toán đóng là bài toán không có các đặc trưng trên.

Ví dụ về bài toán mở : «Nếu ABC là một tam giác bất kì với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, thì hệ thức $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ đúng hay sai ?».

Ngược lại, nếu bài toán được trình bày dưới dạng : «Giả sử ABC là một tam giác bất kì với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ », thì nó không còn là bài toán mở. Trong những bài toán dạng này, thông thường chân lí của một mệnh đề đã được cho biết là đúng. Vấn đề đối với học sinh chỉ còn tìm cách biết vì sao nó đúng. Như N.Balacheff (1988) đã viết : "*Các tình huống dạy học toán đã gánh cho học sinh trách nhiệm về cái đúng* ".

Ngược lại, trong bài toán mở kết quả cần tìm được trình bày ở dạng mở, chính học sinh phải cảm nhận và sau đó khẳng định được kết quả này nhờ vào suy luận. Bài toán mở tạo cơ hội cho học sinh phát triển cả những khả năng thực nghiệm (mò mẫm, thử nghiệm, dự đoán, …) và suy luận, phát triển năng lực và phẩm chất tư duy và đặc biệt khả năng thích ứng dần với cuộc sống thực tiễn. Quả thực, trong thực tế cuộc sống xã hội cũng như nghề nghiệp, chân lí thường không nảy sinh một cách tự nhiên, mà trước hết là kết quả của những kiểm nghiệm, mò mẫm và dự đoán.

Vì thế, trong dạy học toán ở trường phổ thông, nên tăng cường trình bày và khai thác các bài toán dưới dạng bài toán mở.

2.3. Bài toán tìm tòi và bài toán chứng minh

Theo G. POLIA (1965), có thể xếp loại các bài toán theo hai dạng :

[22] Tham khảo thêm Tôn Thân (1995), Nguyễn Văn Bàng (1997).

- Bài toán tìm tòi (problème de détermination): Giải bài toán tìm tòi là tìm ra một đối tượng nào đó là cái chưa biết của bài toán. Trong các bài toán dạng này, đề bài không cho biết trước kết quả cần đạt tới. Chẳng hạn, một hình trong bài toán dựng hình, các số (nghiệm) trong bài toán giải phương trình, một phương trình trong bài toán lập phương trình, …

- Bài toán chứng minh (problème à démontrer) : Tìm cách khẳng định chân lí của một mệnh đề. Như vậy, kết quả đã được biết, vấn đề là làm rõ vì sao có kết quả đó.

2.4. Bài toán thực tiễn và bài toán toán học

2.4.1. Khái niệm cơ bản

Y. Chevallard (1984) và L. Coulange (1997) phân biệt ba khái niệm khác nhau : ***Bài toán thực tiễn*** (Problème concret), ***Bài toán phỏng thực tiễn*** (Problème pseudo –concret) ***và bài toán toán học*** (Problème mathématique).

Theo các tác giả này, bài toán thực tiễn thuộc phạm vi ngoài toán (Domaine extra-mathématique), bài toán phỏng thực tiễn thuộc phạm vi phỏng thực tiễn (Domaine "pseudo – concret"), còn các bài toán toán học thuộc phạm vi toán học.

Có thể mô tả các khái niệm này một cách tương đối như sau :

Bài toán thực tiễn là bài toán mà các dữ kiện, các biến, các yêu cầu, các câu hỏi, các mối quan hệ, … chứa đựng trong bài toán đều là các yếu tố của thực tiễn "thực".

Bài toán phỏng thực tiễn là bài toán mà các dữ kiện, các biến, các yêu cầu, các câu hỏi, các mối quan hệ, … không phải là các yếu tố của thực tiễn "thực" mà chỉ là sự mô phỏng (hay phản chiếu) của thực tiễn này. Nói cách khác, có một sự sai biệt giữa bài toán thực tiễn và bài toán phỏng thực tiễn. Sự sai biệt này thường là hệ quả của những ràng buộc của hệ thống dạy học. Chẳng hạn, giá trị số của các dữ kiện được cho trong bài toán thường được chọn sao cho việc tính toán không quá phức tạp, kết quả giải (đáp số) "đẹp" hơn, …

Bài toán toán học là bài toán trong đó các dữ kiện, các biến, các yêu cầu, các câu hỏi, các mối quan hệ, … đều được diễn tả bằng ngôn ngữ và kí hiệu toán học.

Một vài lưu ý :

• ***Tính tương đối của khái niệm « Bài toán thực tiễn »*** : Việc phân biệt rạch ròi ba khái niệm như trên là cần thiết, nhất là khi đi sâu nghiên cứu vấn đề ***dạy học mô hình hoá*** hay ***dạy học bằng mô hình hoá*** (xem mục 2.4.2 dưới đây). Tuy nhiên, trong phạm vi trường học, hầu hết các bài toán mà ta vẫn thường gọi là bài toán thực tiễn thực ra chỉ là các bài toán phỏng thực tiễn, chẳng hạn, bài toán «Đoán ngày sinh» sau đây :

«*Nếu em muốn đoán biết ngày sinh tháng đẻ của một người bạn, em hãy đề nghị bạn đó nhân ngày sinh với 12, tháng đẻ với 31 rồi cho biết tổng của hai tích này.*

Hãy tính ngày sinh tháng đẻ của bạn, nếu bạn ấy cho biết tổng của hai tích nói trên là 160».

Rõ ràng, trong thực tế cuộc sống, dường như không thể xảy ra tình huống « hỏi tuổi » như vậy, ngoại trừ bài toán được đặt ra với một mục đích sư phạm nào đó[23].

Từ các phân tích trên, trong phạm vi dạy học toán ở trường phổ thông, để tránh phức tạp hoá vấn đề và để không làm xáo trộn cách gọi thông thường, chúng tôi sử dụng thuật ngữ ***Bài***

---

[23] Bài toán này có nguồn gốc từ bài toán được cho bởi Đinh Quang Minh (2003) và có thể vì lí do trên mà tác giả này gọi nó là "Bài toán có nội dung thực tiễn" chứ không phải là bài toán thực tiễn.

toán thực tiễn để chỉ cả bài toán thực tiễn và bài toán phỏng thực tiễn theo nghĩa nêu trên. Ta nói, thuật ngữ trên được dùng theo nghĩa rộng.

Việc dùng thuật ngữ *Bài toán thực tiễn* theo nghĩa rộng này cũng xuất phát từ một lí do khác sau đây:

Trong nhiều cuộc hội thảo góp ý về sách giáo khoa thí điểm, không ít giáo viên phổ thông phê phán việc các tác giả sách giáo khoa đưa vào một số bài toán thực tiễn, nhưng chẳng thực tiễn chút nào vì theo họ các bài toán đó không bao giờ xuất hiện trong thực tế. Phê phán này rất đáng lưu tâm, vì nó cảnh báo nguy cơ sử dụng những bài toán được gọi là bài toán thực tiễn, nhưng lại quá xa rời thực tiễn. Tuy nhiên, cũng không nên cầu toàn, vì như ta đã làm rõ ở trên, bản thân thuật ngữ Bài toán thực tiễn như ta vẫn thường gọi chỉ có tính tương đối (phần lớn trong chúng chỉ là mô phỏng của thực tiễn). Nói cách khác, ta nên chấp nhận một sự sai biệt nào đó giữa thực tiễn trong bài toán và thực tế "thực", nhằm đạt được một số mục tiêu dạy học khác mà ta sẽ trình bày trong mục 2.4.2 dưới đây.

• ***Tính phổ dụng của khái niệm « thực tiễn »*** : Thuật ngữ « thực tiễn » ở đây không bó hẹp trong thực tiễn cuộc sống (cuộc sống đời thường, cuộc sống lao động sản xuất, cuộc sống chính trị xã hội, …), mà bao hàm cả thực tiễn trong các ngành khoa học khác (vật lí, hoá học, sinh học, …) và ngay cả thực tiễn của lịch sử toán học. Chẳng hạn, xét nghịch lí « Mũi tên không bao giờ đến đích » sau đây:

«*Từ điểm A ta bắn một mũi tên về đích là điểm B. Để đến được B, mũi tên cần đi qua trung điểm A_1 của đoạn AB, và sau đó nó cần qua trung điểm A_2 của đoạn thẳng A_1B, ... qua trung điểm A_n của đoạn thẳng $A_{n-1}B$, ... Nhưng số các trung điểm này là vô hạn. Do đó, mũi tên không bao giờ có thể đến đích B, dù cho số đo đoạn thẳng AB rất bé.*»

Trong thế giới vật lí, điều này không bao giờ xảy ra. Nhưng những nghịch lí tương tự như vậy đã từng xuất hiện trong lịch sử phát triển của toán học, đã từng làm các nhà toán học bối rối, làm khoa học toán học chao đảo. Chúng xuất hiện vừa như những chướng ngại, vừa như động cơ phát triển của toán học. Việc giải quyết được các bài toán nghịch lí như vậy góp phần đưa toán học lên một cấp độ phát triển mới, cao hơn : Sự ra đời của giải tích toán học, của khái niệm giới hạn và phép tính vi tích phân.

2.4.2. Vai trò và ý nghĩa của việc sử dụng các bài toán thực tiễn trong dạy học toán

• **Cho phép làm rõ vai trò và ý nghĩa thực tiễn của các tri thức toán học**

Trong trường hợp này, các bài toán thực tiễn được sử dụng với hai mục đích:

- Làm cho học sinh ý thức được về nguồn gốc thực tiễn của toán học: Dù toán học là một khoa học suy diễn, nhưng phần lớn các tri thức toán học đều nảy sinh từ thực tiễn, là công cụ hay phương tiện giải quyết các vấn đề của thực tiễn.

- Nhấn mạnh đặc trưng của khoa học toán học cũng như mục tiêu của dạy học toán: Toán học là một khoa học công cụ. Dạy học toán không chỉ đơn thuần là dạy học các tri thức toán học thuần tuý mà còn dạy học cách vận dụng các tri thức này vào việc giải quyết các vấn đề của thực tiễn, từ đó hình thành và phát triển ở học sinh thói quen và khả năng vận dụng toán học vào thực tế.

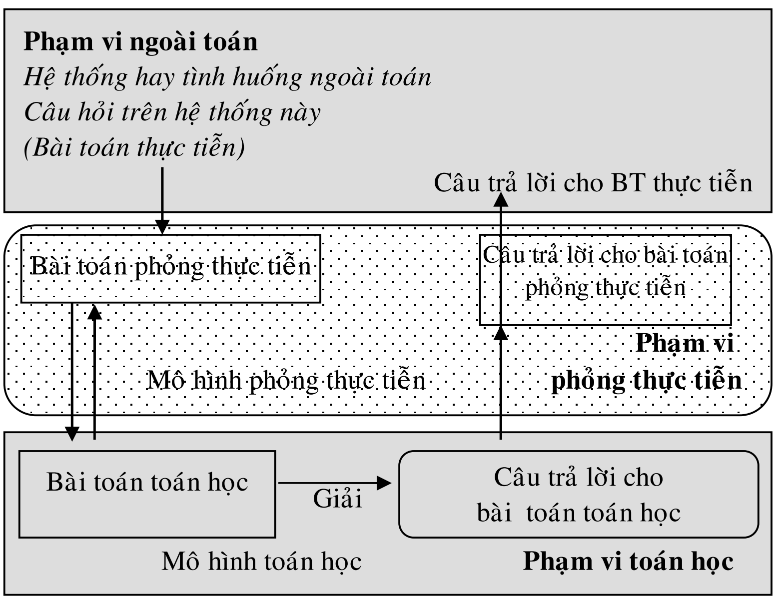
• **Cho phép tiếp cận dạy học mô hình hoá và dạy học bằng mô hình hoá**

Như đã nói ở trên, một trong các mục tiêu của dạy học toán học là cung cấp cho học sinh những tri thức toán học công cụ, và quan trọng hơn là cách vận dụng các tri thức này trong việc giải quyết các vấn đề nảy sinh từ thực tiễn.

Một cách sơ lược, quy trình giải quyết các bài toán thực tiễn thường trải qua các bước sau đây :

- Chuyển bài toán thực tiễn về bài toán toán học, "biên dịch" các yếu tố thực tiễn sang ngôn ngữ toán học và cấu trúc lại chúng. Tổng quát hơn, cần xây dựng **một mô hình** toán học của thực tiễn.
- Giải bài toán toán học,
- Chuyển câu trả lời cho bài toán toán học về câu trả lời cho bài toán thực tiễn ban đầu.

Mối quan hệ giữa các bài toán này và quy trình giải quyết bài toán thực tiễn có thể tóm lược trong lược đồ sau đây, được phỏng theo sơ đồ của L. Coulange (1997) :



Câu trả lời cho bài toán giả thực tiễn chỉ là một "xấp xỉ" của câu trả lời cho bài toán thực tiễn.

Những phân tích trên cho thấy, việc xây dựng mô hình toán học của thực tiễn là phương tiện trung gian cho phép giải các bài toán thực tiễn và ngược lại, giải các bài toán thực tiễn lại là động cơ tiếp cận vấn đề mô hình hoá.

Một cách tổng quát hơn, việc tăng cường các bài toán thực tiễn trong dạy học toán còn ngầm nhắm tới một mục tiêu xa hơn, quan trọng hơn và mấu chốt hơn của dạy học toán, đó là dạy học mô hình hoá và dạy học bằng mô hình hoá.

Ở cấp độ phổ thông, dạy học mô hình hoá và dạy học bằng mô hình hoá không được thực hiện một cách tường minh, mà chỉ ngầm ẩn qua dạy học giải các bài toán thực tiễn.

Để hiểu thấu đáo hơn, cần có một sự trình bày công phu, đầy đủ và chi tiết về mô hình hoá và dạy học mô hình hoá. Tuy nhiên. đó không phải là mục tiêu của tài liệu này.

Một cách sơ lược có thể hiểu, ***dạy học mô hình hoá*** là dạy học cách thức xây dựng mô hình toán học của thực tiễn, nhằm tới trả lời cho những câu hỏi, vấn đề nảy sinh từ thực tiễn.

Tuy nhiên, thuật ngữ « dạy học mô hình hoá » được hiểu như trên có thể dẫn tới cách hiểu sai lệch rằng : trước khi xây dựng mô hình của thực tế, cần thiết phải có các tri thức toán học. Từ đó, quy trình dạy học có thể là :

Dạy học tri thức toán học lí thuyết → Vận dụng các tri thức này vào việc giải các bài toán thực tiễn và do đó vào việc xây dựng mô hình của thực tiễn.

Quy trình này làm mất đi vai trò động cơ của các bài toán thực tiễn và do đó làm mất đi nguồn gốc thực tiễn của các tri thức toán học : tri thức toán học không còn nảy sinh từ nhu cầu giải quyết các bài toán thực tiễn.

Quan niệm « ***Dạy học bằng mô hình hoá*** » cho phép khắc phục khiếm khuyết này. Theo quan niệm này, vấn đề là dạy học toán thông qua dạy học mô hình hoá. Như vậy, tri thức toán học cần giảng dạy sẽ nảy sinh qua quá trình giải quyết các bài toán thức tiễn. Quy trình dạy học tương ứng có thể là :

Bài toán thực tiễn → Xây dựng mô hình toán học → Câu trả lời cho bài toán thực tiễn → Tri thức cần giảng dạy → Vận dụng tri thức này vào giải các bài toán thực tiễn.

Để minh hoạ hai quy trình ứng với các quan điểm trên, ta lấy ví dụ về trường hợp hệ phương trình bậc nhất, hai ẩn số.

Theo quy trình thứ nhất, ta có thể tổ chức dạy học nội dung này theo các bước sau :

– Định nghĩa hệ phương trình bậc nhất, hai ẩn số.
– Trình bày cách giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.
– Giải các bài toán luyện tập, trong đó có các bài toán thực tiễn.
– Ngược lại, theo quan điểm dạy học bằng mô hình hoá, quy trình có thể là :
– Đặt yêu cầu giải các bài toán thực tế.
– Xây dựng mô hình toán học (mầm mống của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn). Việc xây dựng mô hình này nảy sinh từ nhu cầu giải các bài toán đã cho.
– Giải quyết bài toán toán học trong mô hình này.
– Trình bày khái niệm hệ phương trình bậc nhất hai ẩn và phương pháp giải (phương pháp đã dùng trong bước 3).
– Giải các bài toán luyện tập, trong đó có các bài toán thực tiễn.

Trong quy trình 2, khái niệm hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (tri thức sự vật) và phương pháp giải hệ này (tri thức phương pháp) không được cho ngay từ đầu mà nảy sinh qua quá trình giải quyết vấn đề và từ nhu cầu giải quyết bài toán thực tiễn. Nói cách khác, dạy học theo quy trình 2, cho phép làm rõ lí do nảy sinh và tồn tại của các tri thức trên.

Trong lịch sử toán học, vấn đề mô hình hoá đóng một vai trò quan trọng. Việc xây dựng những mô hình toán học của thực tiễn vừa là mục tiêu vừa là động cơ của sự sáng tạo ra nhiều công cụ toán học (tri thức toán học). Chẳng hạn, Đại số Ảrập với việc đưa vào việc giải phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai như là các mô hình toán học cho phép giải

quyết các bài toán thực tiễn về phân chia gia sản thừa kế. Các mô hình toán học cũng được sử dụng nhiều trong các khoa học khác như Vật lí, Hoá học, Sinh học, …

3. Các chức năng chủ yếu của bài toán trong dạy học toán

Ở một số nước trên thế giới, trong đó có Việt Nam, cấu trúc truyền thống của sách giáo khoa luôn có hai phần riêng biệt : Phần lí thuyết và tiếp sau đó là phần bài tập. Ngay trong phần lí thuyết, kiến thức lí thuyết (định nghĩa, định lí, công thức,…) vẫn thường được trình bày trước, sau đó là các ví dụ minh hoạ hay bài tập áp dụng. Dạy học các kiến thức lí thuyết luôn đóng vai trò trung tâm.

Cấu trúc này lại tương thích với mô hình dạy học truyền thống, theo đó giáo viên thường truyền thụ trực tiếp kiến thức cho học sinh, cho một vài ví dụ minh hoạ và yêu cầu học sinh làm các bài tập áp dụng theo đúng mẫu mà giáo viên đã trình bày. Nói cách khác học sinh học bằng cách bắt chước.

Đó có thể là những nguyên nhân chủ yếu dẫn tới quan niệm khiếm khuyết đồng nhất bài toán với bài tập (theo nghĩa đã nêu ở trên bởi tác giả Trần Thúc trình), và từ đó bó hẹp chức năng của các bài toán chỉ vào chức năng củng cố và vận dụng kiến thức đã học, rèn luyện kĩ năng, kĩ xảo hay kiểm tra việc tiếp thu kiến thức của học sinh[24].

Tuy nhiên, những nghiên cứu khoa học luận lịch sử toán học chỉ rõ rằng hầu hết các khái niệm và các lí thuyết toán học thường nảy sinh từ nhu cầu giải các bài toán trong thực tế cuộc sống, trong nội bộ toán học, hay trong các khoa học khác. Nói cách khác, tri thức toán học không phải được cho sẵn, mà được xây dựng bắt đầu từ việc giải quyết các bài toán. Như vậy, quan hệ thứ tự giữa kiến thức lí thuyết và bài toán không còn là : Kiến thức lí thuyết → Bài tập áp dụng, mà chủ yếu là : Bài toán → Kiến thức lí thuyết → Bài tập áp dụng + Bài toán mới.

Những nghiên cứu tâm lí học (nhất là của J. Piaget) cũng cho thấy : Việc học tập thực sự chỉ nảy sinh trong sự tác động qua lại của chủ thể (người học) với môi trường, trong đó người học thấy được và có nhu cầu giải quyết các bài toán.

Từ đó, quan điểm sư phạm hiện đại về dạy học toán, đang được áp dụng trong nhiều nước, là :

---

[24] Chẳng hạn, sách giáo viên Đại số 7, NXB GD 2002 làm rõ quan điểm xây dựng nội dung chương trình đại số ở lớp 7 như sau :

"*Sách đại số 7 sử dụng rộng rãi phương pháp suy diễn. Đó vốn là phương pháp tư duy đặc thù của toán học, chính nó tạo nên sức mạnh và vẻ đẹp độc đáo của môm khoa học này.*

a) Nhiều khái niệm được đưa ra theo lí giải về sự phát triển logic của bộ môn, sau đó có các ví dụ thực tế minh họa.

b) Nhiều định nghĩa, tính chất được phát biểu tổng quát trước và áp dụng bằng số cụ thể sau".

Quan điểm này có hệ quả trực tiếp trên việc lựa chọn bài tập và chức năng của chúng. Cụ thể, vai trò của các bài tập này rất hạn chế. Ta thấy rõ điều này qua giải thích của sách giáo viên :

"*Sách Đại số 7 có một hệ thống bài tập khá phong phú, gắn chặt với phần lí thuyết, tạo thành một cơ cấu hòan chỉnh, hợp logic. Bài tập bao gồm các loại sau*

a) Bài tập minh họa lí thuyết…. b) Bài tập củng cố lí thuyết….

c) Bài tập hoàn thiện lí thuyết… d) Bài tập rèn luyện kĩ năng…

e) Bài tập phát triển khả năng tư duy sáng tạo của học sinh".

Tập trung dạy học toán trên hoạt động của học sinh. Chính học sinh tự mình xây dựng các kiến thức toán học thông qua hoạt động giải các bài toán. Học toán là học nêu lên, học trình bày và học giải quyết các bài toán ; học xem xét lại các bài toán dưới ánh sáng của những công cụ lí thuyết nảy sinh từ chính nhu cầu giải quyết các vấn đề.

Nói cách khác, giải các bài toán đóng vai trò trung tâm trong hoạt động dạy học. Chức năng của bài toán không còn bó hẹp trong chức năng của bài tập áp dụng.

Quan niệm này kéo theo sự thay đổi ngay từ cấu trúc của sách giáo khoa. Hiện nay, sách giáo khoa của nhiều nước trên thế giới đã thoát khỏi cách trình bày truyền thống « Phần lí thuyết → Phần bài tập » và nhấn mạnh trên vai trò trung tâm của hoạt động giải các bài toán.

Chẳng hạn, trong sách giáo khoa Toán lớp 11, ban khoa học tự nhiên, bộ sách « Déclic » (2003) của Cộng hoà Pháp, cấu trúc một chương bao gồm các phần sau đây :

1. **Hoạt động** (Activités) : Bao hàm những bài toán cần giải quyết (không có lời giải đi kèm). Mục đích chủ yếu là chuẩn bị cho việc học tập các kiến thức mới trong phần lí thuyết.

2. **Lí thuyết** (Cours) : trình bày các kiến thức mới cần lĩnh hội.

3. **Các bài tập có lời giải** (Exercices résolus).

4. **Công việc có hướng dẫn** (Travaux dirigés) : Đề cập các dạng toán mà chương trình yêu cầu, các tình huống liên môn (có hướng dẫn nhưng không có lời giải đi kèm) và một vài tổng hợp về kiến thức lí thuyết đã đưa vào trong chương.

5. **Bài tập** (Exercices) : Trước đây, phần này có tên là « Bài tập và bài toán ». Hiện nay, dù chỉ gọi ngắn gọn là « Bài tập » nhưng nó cũng bao hàm hai phần rõ rệt : phần các bài tập áp dụng và phần các bài toán cho phép đào sâu kiến thức lí thuyết, đề cập các chủ đề xuyên suốt nhiều nội dung của chương trình, bài toán thực tiễn, …

Sau đây ta sẽ trình bày các chức năng chủ yếu của bài toán trong dạy học toán.

a) Tạo động cơ

■ *Động cơ cho việc tiến hành nghiên cứu đối tượng mới*

Trong trường hợp này, bài toán sẽ tạo ra nhu cầu và hứng thú giải quyết vấn đề đặt ra, từ đó tạo nên động cơ đi vào nghiên cứu đối tượng mới.

Ví dụ 1 : Các bài toán kiểu nghịch lí sau là động cơ cho việc đi vào nghiên cứu khái niệm giới hạn. Nói cách khác, chúng tạo ra ở người học cảm giác về sự khiếm khuyết trong hệ thống kiến thức của mình và cảm xúc rằng việc đi nghiên cứu khái niệm giới hạn cho phép giải quyết được các nghịch lí này là rất thú vị và có lợi.

<u>Bài toán 1</u> : Phải chăng 1 = 0 ?

Xét tổng : $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + \ldots$

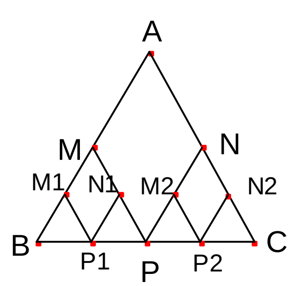
Ta thấy : $S = (1- 1) + (1 - 1) + \ldots + (1 - 1) + \ldots$

$= 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0$

Mặt khác : $S = 1 + (-1 + 1) + \ldots + (-1 + 1) + \ldots$

$= 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 1$

Vậy 1 = 0 (!).



Bài toán 2 : 2 = 1 ?

Cho một tam giác đều ABC cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Khi đó ta có :

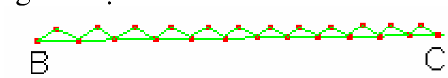
$$BM + MP + PN + NC = AB + AC = 2$$

Gọi M_1, N_1, P_1 lần lượt là trung điểm của BM, MP và PB ; M_2, N_2, P_2 lần lượt là trung điểm của PN, NC và CP. Ta có :

$BM_1 + M_1P_1 + P_1N_1 + N_1P + PM_2 + M_2P_2 + P_2N_2 + N_2C =$

$= BM + MP + PN + NC = AB + AC = 2.$

Lặp lại n lần cùng một quy trình như trên, bằng trực giác ta thấy, khi n dần đến vô cực, đường gấp khúc đạt được trùng với cạnh BC.

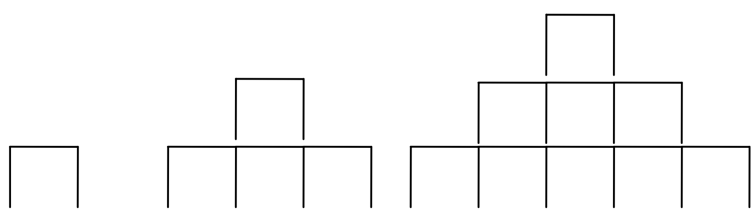


Nói cách khác, ta có : 2 = 1.

Vì sao khi gấp đôi mãi số cạnh của đa giác đều nội tiếp đường tròn, ta đạt được chu vi đường tròn, trong khi cách làm này lại dẫn tới nghịch lí như trong ví dụ 2 ?

Ví dụ 2 : Bài toán sau có thể tạo nên hứng thú, sự tò mò để đi vào học tập khái niệm cấp số cộng.

Một nhóm học sinh tiểu học chơi trò xếp các que diêm thành lâu đài hình tháp. Cách xếp được mô tả như hình sau :



Để được ghi vào sách kỉ lục guiness của trường, các em quyết định xếp một lâu đài 1000 tầng. Nhưng họ gặp khó khăn là không biết cần bao nhiêu que diêm để xếp tầng đế và phải mua tất cả bao nhiêu que diêm để xếp toàn bộ lâu đài. Bạn có thể tính dùm họ không?

■ *Động cơ **nảy sinh** khái niệm mới*

Theo Y. Chevallard (1980), trong toán học, ***bài toán***, ***ý tưởng*** và ***công cụ*** hình thành nên ba thành phần chủ yếu của hoạt động toán học (nghiên cứu toán học). Trong đó, bài toán cần giải quyết là động cơ của nghiên cứu, công cụ là phương tiện giải quyết vấn đề, còn ý tưởng là yếu tố trung gian nối khớp bài toán và công cụ. Trong mối quan hệ này bài toán cần giải quyết đóng vai trò cơ bản. Công cụ là một dạng hoạt động của kiến thức mới, là mầm mống nảy sinh kiến thức mới, nó cho phép làm rõ nghĩa của kiến thức này.

Ví dụ : Hình thành khái niệm Đạo hàm (xem mục A về dạy học khái niệm).

Cách hình thành khái niệm đạo hàm theo quy trình như đã xét trong phần A cho phép làm rõ ý nghĩa của khái niệm đạo hàm : Sự ra đời của khái niệm này không phải là ngẫu nhiên, mà xuất phát từ nhu cầu giải quyết các vấn đề nảy sinh không chỉ trong nội bộ toán học mà còn trong các khoa học khác. Nó là kết quả của sự khái quát hoá các công cụ được sử dụng trong các trường hợp đơn lẻ.

b) Hoạt hoá kiến thức cũ

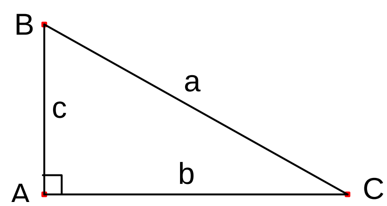
Quá trình hình thành kiến thức mới luôn đòi hỏi vận dụng các kiến thức cũ. Tuy nhiên, không phải lúc nào học sinh cũng nhớ một cách đầy đủ các kiến thức cũ này, hoặc có nhớ nhưng đôi khi lại không biết vận dụng. Để đảm bảo rằng học sinh đã sẵn sàng và dễ dàng huy động các kiến thức cần thiết cho dạy học nội dung mới, thì hoạt động giải các bài toán là một trong các cách thức tốt nhất để học sinh « tìm lại được » các kiến thức và kĩ năng này vì nó cho phép phát huy vai trò chủ động và tích cực của học sinh.

c) Phương tiện đưa vào kiến thức mới

Ở cấp độ thấp hơn, các bài toán cũng có thể được sử dụng như phương tiện đưa vào kiến thức mới. Kiến thức mới này nảy sinh không phải như là*công cụ*, mà như là *kết quả* của hoạt động giải quyết vấn đề.

Ví dụ 1 : Dạy học định lí sin trong tam giác.

- Bài toán 1 : Trong tam giác ABC vuông tại A



a) Tính sinB và sinC theo b, c và R với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa ba cạnh, ba góc của tam giác với bán kính R.

Kết quả mong đợi cho câu b là :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2R \ (1)$$

- Bài toán 2 : Hệ thức (1) còn đúng đối với một tam giác bất kì không ?

Kết quả của việc giải quyết vấn đề trên chính là nội dung định lí sin trong tam giác.

Ví dụ 2 : Khái niệm « Phương trình tham số của đường thẳng trong mặt phẳng » được đưa vào như là kết quả của hoạt động giải bài toán sau :

« Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $M_0(x_0,y_0)$ và véc tơ khác không $\vec{u}(a,b)$.

a) Có thể kẻ được bao nhiêu đường thẳng Δ qua M_0 và có véctơ chỉ phương $\vec{u}$?

b) Tìm điều kiện cần và đủ để điểm M(x,y) nằm trên Δ.»

d) Củng cố kiến thức, rèn luyện kĩ năng và hình thành kĩ xảo toán học

• Sau khi trình bày một định nghĩa, một định lí, một tính chất hay một tri thức phương pháp, chúng ta thường cho các ví dụ minh hoạ, các bài tập áp dụng. Đó chính là các bài tập

có mục đích củng cố các kiến thức mới vừa xây dựng và hình thành kĩ năng vận dụng kiến thức vào việc giải quyết các bài toán.

• Một trong những chức năng chủ yếu của phần bài tập trong mỗi bài, mỗi chương là củng cố các kiến thức, rèn luyện các kĩ năng đã được đưa vào trong phần lí thuyết hay hình thành kĩ năng mới và kĩ xảo có liên quan.

• Việc giải các bài tập toán học không chỉ cho phép củng cố các kiến thức và kĩ năng vừa mới được hình thành, mà cả những kiến thức và kĩ năng đã có trước đó.

e) Phát triển các năng lực và phẩm chất tư duy

Giải các bài toán là cơ hội tốt nhất để rèn luyện các thao tác tư duy như : Phân tích, So sánh, Tổng hợp, Khái quát hoá, Đặc biệt hoá, … và phát triển các phẩm chất tư duy như : Tính linh hoạt, tính độc lập, tính sáng tạo, tính phê bình, …

f) Công cụ chẩn đoán biểu tượng của học sinh về một khái niệm

Trong chương « Dạy học khái niệm toán học », chúng ta đã làm rõ rằng, thông thường trước khi học một khái niệm nào đó, người học đã có những biểu tượng ban đầu về đối tượng được phản ánh trong khái niệm. Các biểu tượng này được hình thành qua tiếp xúc với những tình huống trong thực tế cuốc sống, hay trong học tập ở nhà trường, trong đó khái niệm hiện diện một cách ngầm ẩn. Chúng cũng có thể được hình thành qua các bài học chính thức về khái niệm. Chẳng hạn, trước khi dạy học khái niệm Parabol ở bậc THPT, học sinh đã có những biểu tượng về parabol từ lớp 9.

Các biểu tượng ban đầu này có thể chưa đầy đủ, thậm chí sai lệch, không phù hợp với cái mà ta muốn dạy. Do đó, việc hiểu được biểu tượng ban đầu này của người học trước khi dạy học khái niệm trở nên rất quan trọng. Vì nó cho phép chúng ta lựa chọn và tổ chức một cách thích hợp quy trình dạy học khái niệm này. Nó cho phép biết được cái mà ta cần điều chỉnh, cái mà ta cần củng cố, cái mà ta cần bổ sung. Mặt khác, nó cho phép thích ứng ý định của người dạy vào vấn đề mà người học thực sự quan tâm.

Để có được những thông tin về biểu tượng ban đầu này, ta có thể :

– tham khảo các công trình nghiên cứu có liên quan đến khái niệm,
– hoặc tự mình thực hiện các nghiên cứu,
– hoặc đơn giản chỉ làm một vài thử nghiệm trước khi tiến hành dạy học khái niệm, thông qua việc đề nghị học sinh giải một số bài tập.

Như vậy, việc giải các bài toán cũng là phương tiện chẩn đoán biểu tượng của học sinh về các khái niệm toán học.

g) Cho phép làm rõ vai trò và ý nghĩa thực tiễn của tri thức toán học. Cho phép tiếp cận dạy học mô hình hoá và dạy học bằng mô hình hoá

(Tham khảo mục 2.4.2 ở trên).

➲ **Chú ý : -** Ngoài các chức năng trên, giải các bài toán còn là cơ hội hình thành ở học sinh thế giới quan duy vật biện chứng, các phẩm chất đạo đức, thẩm mĩ. Nó cũng là công cụ cho phép kiểm tra đánh giá kết quả học tập của học sinh.

- Mỗi bài toán cụ thể được đặt ra ở một thời điểm nào đó của quá trình dạy học nói chung, trong một bài học nào đó nói riêng đều chứa đựng một cách tường minh hay ngầm ẩn

những chức năng khác nhau. Các chức năng này không bộc lộ một cách riêng rẽ, tách rời nhau, mà trong mối quan hệ mật thiết với nhau. Khi nhấn mạnh một chức năng cụ thể nào đó, ta muốn nói rằng, ở thời điểm đang xét, chức năng này có vị trí trung tâm hơn so với các chức năng khác.

4. Dạy học giải toán

4.1. Yêu cầu đối với lời giải bài toán

4.1.1. Lời giải không có sai lầm

Lời giải không có sai sót về kiến thức toán học, về suy luận và tính toán, về kí hiệu và hình vẽ, về trình bày, …

Ví dụ 1 (sai lầm về kiến thức cơ bản) : Cho bài toán :

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ :

$$f(x) = \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x^4-1};$$

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4x+4}}{|x+2|};$$

$$h(x) = \lg(x+\sqrt{x^2+1}).$$

Bài làm của một số học sinh :

• Với $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x^4-1}$, ta có :

$$f(-x) = \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x^4-1} = -f(x).$$

Vậy f(x) lẻ.

• Với $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+4x+4}}{|x+2|}$, ta có MXĐ : R \{-2}

$g(x) = \dfrac{x|x+2|}{|x+2|} = x$. Do đó g-x) = -x = -g(x).

Vậy g(x) là hàm số lẻ.

• Với $h(x) = \lg(x+\sqrt{x^2+1})$

+ Vì $(x+\sqrt{x^2+1}) > 0$ với mọi x, nên hàm số có miền xác định là R $\Rightarrow$ MXD là tập đối xứng.

+ $h(-x) = \lg(-x+\sqrt{x^2+1}) \neq -\lg(x+\sqrt{x^2+1}) = -h(x)$. Vậy, h(x) không phải là hàm số lẻ.

Ví dụ 2 (sai lầm về suy luận) : Tham khảo phần Dạy học định lí toán học.

Ví dụ 3 (sai lầm về trình bày) :

• Bài toán : Cho hàm số $f(x) = x^3 - x + 3$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Bài làm của một học sinh 11 :

"Tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$, ta có :

$$f'(x_0) = 3x^2 - 1 = 2 \ ; \ f(x_0) = y_0 = 1^3 - 1 + 3 = 3.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$$y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0 = 2(x - 1) + 3 = 2x + 1."$$

• Bài toán : Cho chất điểm chuyển động thẳng biến đổi đều theo phương trình $S = f(t) = 2t^2 - t + 1$. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ (với S tính bằng mét, t tính bằng giây).

Bài làm của một học sinh 11 :

"Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là :

$$V(t) = S' = 4t - 1 = 4.4 - 1 = 15\text{m/s."}$$

4.1.2. Lập luận phải có căn cứ chính xác

Các bước trong lời giải phải có cơ sở lí luận, nghĩa là phải dựa vào các định nghĩa, tính chất, định lí, quy tắc, công thức, … đã học, các giả thiết đã cho.

Ví dụ (sai lầm do áp dụng sai phạm vi hợp thức của một công thức) :

Giải phương trình :

$$\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x)^3 \ (1)$$

Bài làm của một học sinh : "Điều kiện :

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 4-x > 0 \\ 4+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2 = \log_2(4-x) + \log_2(4+x)$

$\Leftrightarrow \log_2 4(x+1) = \log_2(4-x)(4+x)$

$\Leftrightarrow 4x+4 = 16 - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (thoả điều kiện)".

Bình luận : Cách giải trên đã làm mất nghiệm $x = 2 - 2\sqrt{6}$, do áp dụng sai công thức. Học sinh đã dùng công thức : $\log_a N^\alpha = \alpha\log_a N$ với $N > 0$, cho trường hợp $N \neq 0$. Cụ thể, thay vì $\log_2(x+1)^2 = 2\log_2|x+1|$, học sinh đã dùng $\log_2(x+1)^2 = 2\log_2(x+1)$.

4.1.3. Lời giải phải đầy đủ

Lời giải phải bao hàm hết tất cả các khả năng có thể xảy ra đối với một tình huống.

Ví dụ 1 : Cho phương trình : $(2m+3)x^2 + 2mx + 1 = 0$

a) Tìm giá trị của tham số m để phương trình luôn có nghiệm.
b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Những bài làm không thoả mãn yêu cầu trên :

"a) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow m \leq -1 \text{ hay } m \geq 3."$$

Bài làm này cho đáp số đúng.

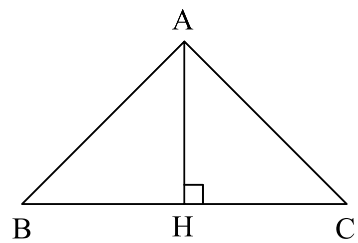
"b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\ \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow$ m² - 2m –3> 0 $\Leftrightarrow$ m <-1 hay m> 3 ".

Bài làm này cho đáp số sai.

Ví dụ 2 : « Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thoả mãn a = 2bcosC, thì tam giác đó cân.»

Bài làm của một học sinh :



Kẻ đường cao AH, ta có : HB = c.cosB ; HC = b.cosC.

a = HB + HC = c.cosB + b.cosC

Từ giả thiết a = 2bcosC, ta có :

c.cosB + b.cosC = 2bcosC $\Leftrightarrow$ c.cosB = bcosC $\Leftrightarrow$ HB = HC

$\Rightarrow$ AH vừa là đường cao vừa là trung tuyến

$\Rightarrow$ Tam giác cân tại A ».

Bình luận : *Bài làm này không thoả mãn yêu cầu trên, vì không tính đến trường hợp H có thể nằm ngoài BC hoặc trùng B hay C.*

4.1.4. Trình bày phải đủ rõ ràng

■ Ví dụ : Cho đường thẳng (Δ) : $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+3t \\ z = 1+5t \end{cases}$ và mặt phẳng (Q) : x – 2y + z + 1 = 0.

Viết phương trình đường thẳng (d) nằm trong mp (Q), biết (d) cắt (Δ) và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(3,1,-1)$.

Trình bày không rõ ràng của một học sinh lớp 12 :

"Ta có : 2 + 2t – 2(-1 + 3t) + 1 + 5t + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ t = -6

$\Rightarrow$ x = -10, y = -19, z = -29

$\Rightarrow$ pt của (d) : $\dfrac{x+10}{3} = \dfrac{y+19}{1} = \dfrac{z+29}{-1}$ ".

4.2. Các bước của hoạt động giải toán

Hoạt động giải một bài toán thường diễn ra theo năm bước sau đây :

1. Tìm hiểu bài toán
2. Tìm kiếm phương hướng giải (chương trình giải)

3. Lựa chọn phương hướng giải và tiến hành giải theo hướng đã chọn
4. Soạn thảo lời giải
5. Kiểm tra, đánh giá kết quả và lời giải.

■ Đối với các bài toán đã có thuật toán giải

Vấn đề cơ bản là nhận dạng được bài toán, nghĩa là phát hiện xem bài toán thuộc dạng nào (đã có thuật toán giải). Tất nhiên không phải lúc nào học sinh cũng dễ dàng nhận ra dạng của bài toán. Công việc này đòi hỏi những khả năng nhất định. Do đó, trong trường hợp này, bước tìm hiểu bài toán đóng vai trò quan trọng hơn cả, vì khi đã phát hiện ra dạng của bài toán, thì công việc còn lại chỉ là áp dụng trực tiếp thuật toán đã biết.

■ Sau đây, ta chỉ bàn đến các bài toán chưa có, hay không có thuật toán giải, và các bài toán mà thuật toán giải cũ tỏ ra quá « đắt giá ».

4.2.1. Tìm hiểu bài toán

Để tìm ra đường lối giải, trước hết cần phải hiểu bài toán, nghĩa là hiểu các dữ kiện đã được cho (giả thiết), điều kiện gắn liền với bài toán và hiểu được cái mà bài toán yêu cầu giải quyết (cái gì cần tìm, cái gì cần chứng minh, …).

Việc đọc đi, đọc lại đề bài nhiều lần một cách rõ ràng, mạch lạc (có thể đọc đến khi thuộc lòng đề bài) là cần thiết cho việc hiểu bài toán.

Đối với bài toán hình học, để hiểu rõ hơn bài toán, nói chung cần phải vẽ hình, ghi tóm tắt giả thiết và kết luận. Hình phải được vẽ sao cho trực quan nhất, thể hiện đầy đủ nhất các dữ kiện đã cho, phải tổng quát nhất (nghĩa là không được vẽ hình trong các trường hợp quá đặc biệt).

4.2.2. Tìm kiếm phương hướng giải

Thực tế chỉ ra rằng : khó khăn lớn nhất của đa số học sinh khi đứng trước một bài toán cần giải là không biết « khởi động » như thế nào, nghĩa là không biết bắt đầu từ đâu. Thông thường, họ biến đổi một cách tuỳ tiện, cầu may, mà không có một định hướng cụ thể, mặc dù họ đã hiểu được dữ kiện của bài toán cũng như nhiệm vụ cần làm.

Một số kĩ thuật cho phép khởi động

a) Hãy bắt đầu từ thao tác nhận biết

Khi giải một bài toán, ta luôn luôn phải lấy ra, tách ra từ trí nhớ những kiến thức có liên quan tới bài toán (hành động huy động kiến thức) và sắp xếp, chắp nối các kiến thức đó lại với nhau theo hướng có lợi để tìm ra cách giải (hành động tổ chức kiến thức). Không có một lời giải nào tách rời khỏi kiến thức cũ.

Nhưng động viên kiến thức nào ? Tách ra từ trí nhớ những yếu tố nào liên quan tới bài toán, yếu tố nào có lợi ? Để giải quyết vấn đề đó, hành động huy động kiến thức thường được bắt đầu từ thao tác nhận biết : nhận biết các yếu tố quen thuộc, các mối liên hệ (rõ ràng hay ngầm ẩn) giữa các yếu tố có mặt trong bài toán, mà trong pha tìm hiểu bài toán có

thể ta chưa phát hiện ra. Thành công trong việc giải bài toán phụ thuộc chủ yếu vào thao tác nhận biết này.

Để làm được điều đó, có thể khai thác và đánh giá các dữ kiện, hình vẽ và hình thức thể hiện bên ngoài của các dữ kiện, để phát hiện mối quan hệ giữa chúng. *Tập cách nhìn một đối tượng dưới nhiều dáng vẻ khác nhau.*

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sin^4x + \cos^4x = 1$. (1)

Đây là một bài toán không có thuật giải cho trước.

Nhận xét 1 : Nhìn phương trình như là một phương trình bậc cao (nhận biết). Điều này gợi ra **ý tưởng** « hạ bậc » các biểu thức bậc cao. Ý tưởng này, đến lượt nó lại dẫn tới hành động huy động những kiến thức liên quan đến việc hạ bậc các biểu thức lượng giác :

$$* \ \sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin2x.$$

Như vậy, có thể biến đổi phương trình đã trở về dạng quen thuộc $1 - \frac{1}{2}\sin2x = 1$.

$$* \ \sin^4x + \cos^4x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2.$$

Từ đó (1) trở thành : $2\cos^4x + 2 = 4$.

Nhận xét 2 : Vế trái bậc 4, vế phải bậc 0. Nhận biết này kéo theo ý tưởng nâng vế phải lên bậc 4 để đạt được một sự "cân bằng" trong phương trình. Như vậy, kiến thức cần huy động sẽ liên quan tới việc nâng bậc này.

Chẳng hạn, nhìn 1 như là $(\sin^2x + \cos^2x)^2$ ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2$$
$$\Leftrightarrow \sin^4x + \cos^4x = \sin^4x + \cos^4x + 2\sin^2x.\cos^2x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2x.\cos^2x = 0.$$

Nhận xét 3: Nhìn phương trình như là một phương trình chứa nhiều kiểu hàm số lượng giác khác nhau (sinx và cosx).

Ý tưởng là tìm cách giảm số các hàm số có mặt trong phương trình.

Huy động kiến thức về chuyển đổi giữa các hàm số sẽ dẫn tới các hướng giải khác nhau như :

$$* \ (1) \Leftrightarrow (1 - \cos^2x)^2 + \cos^4x = 1 \Leftrightarrow \cos^4x - \cos^2x = 0$$
$$* \ (1) \Leftrightarrow \sin^4x + (1 - \sin^2x)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^4x - \sin^2x = 0$$
$$* \ (1) \Leftrightarrow \sin^4x = 1 - \cos^4x$$
$$\Leftrightarrow \sin^4x = (1 - \cos^2x)(1 + \cos^2x)$$
$$\Leftrightarrow \sin^4x = \sin^2x.(2 - \sin^2x)$$

$* \ (1) \Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \cos^4x = 1$. Nhận dạng tiếp tục, chẳng hạn phương trình chứa nhiều loại góc, sẽ cho phép đi đến cách giải.

$*$ Chia hai vế cho $\sin^4x$ (hay $\cos^4x$) để đạt được phương trình chỉ chứa tgx hay cotgx.

* Đưa về sinx và cosx về $tg\frac{x}{2}$ để có phương trình một ẩn phụ $t = tg\frac{x}{2}$.

Nhận xét 4 : Nhìn 1 như là $\sin^2x + \cos^2x$. Điều này gợi ra ý tưởng nhóm các số hạng.

Chú ý : Giải phương trình $\sin^4x + \cos^4x = 1$ là một bài toán đơn giản. Nhưng việc giải theo nhiều cách khác nhau như trên có nhiều lợi ích. Chẳng hạn, đó là cơ hội củng cố rất nhiều công thức lượng giác khác nhau. Nhưng điều mấu chốt là nó cho phép rèn luyện được kĩ năng tìm tòi lời giải một bài toán và qua đó truyền thụ tri thức phương pháp.

Ví dụ 2 : CMR nếu tam giác ABC thoả mãn :

$$\frac{2\sin A.\sin B}{\sin C} = \cot g\frac{C}{2}$$

thì ABC là tam giác cân.

Nhận biết, ý tưởng và hướng giải :

– Để chứng minh ABC cân, có thể chứng minh tam giác có hai góc bằng nhau hay hai cạnh bằng nhau

– Giả thiết chỉ chứa yếu tố cạnh, nên ta ưu tiên hướng chứng minh hai góc bằng nhau. Nhưng chứng minh hai góc nào bằng nhau ? A = B, A = C hay B = C ?

– Trong giả thiết, A và B có vai trò bình đẳng như nhau, nên ta dự đoán : A = B có nhiều khả năng xảy ra.

Nhưng làm thế nào để chứng minh A = B ?

Ý tưởng là làm xuất hiện góc chứa hiệu A – B. Do đó, cần huy động kiến thức cho phép đưa sinA.sinB về dạng chứa hiệu A – B.

$$\frac{2\sin A.\sin B}{\sin C} = \cot g\frac{C}{2} \Rightarrow \cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\cos^2\frac{C}{2}$$

Vì vấn đề là chứng minh A = B, nên giữ lại không biến đổi cos(A - B) và đưa C về A, B. Từ đó biến đổi $2\cos^2\frac{C}{2} = 1 + \cos C = 1 - \cos(A+B)$. Ta có, $\cos(A - B) = 1 \Rightarrow A = B$.

Ví dụ 3 : Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$

Hướng 1. Nhận biết :

* Đó là một phương trình vô tỉ. Cách giải thông thường là khử căn. Nhưng, nếu bình phương hai vế sẽ dẫn đến một phương trình bậc 8 !

* $x^2 - 6x + 11 = -(x-2)(4-x) + 3$

Hướng giải : Đặt $u = \sqrt{x-2}$ và $v = \sqrt{4-x}$.

Ta có, $u^2 + v^2 = 2$ và $u + v = -u^2v^2 + 3$. Từ đó dẫn tới một hệ hai phương trình, hai ẩn u, v. Nếu tìm được u, v thì tìm được x.

Hướng 2. Nhận biết :

* Đó là một phương trình vô tỉ. Cách giải thông thường là khử căn sẽ dẫn đến một phương trình bậc 8 !

* $(x - 2) + (4 - x) = 2$. Điều này gợi đến bài toán kiểu "Tổng không đổi, tích lớn nhất".

Hướng giải : Đặt A = $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \Rightarrow A^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(4-x)} \le 2 + 2\sqrt{1}$ (Bất đẳng thức Côsi) $\Rightarrow A \le 2$. Mặt khác ta thấy vế phải : $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2$.

Sử dụng phương pháp đối lập sẽ cho phép đi đến kết quả.

Hướng 3. Nhận biết : Vế trái có dạng bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \le \sqrt{1+1}.\sqrt{(x-2)+(4-x)} = 2$$

Vế phải $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2$.

Ý tưởng : dùng phương pháp đối lập.

b) Quy về các bài toán tương tự (quy lạ về quen)

Ví dụ : Trong không gian cho tứ diện OABC, góc tam diện đỉnh O là tam diện vuông. OH là đường cao hạ từ O.

a) Chứng minh rằng H là trực tâm tam giác ABC

b) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Bài toán tương tự : *« Trong tam giác ABC vuông ở A, với H là chân đường cao hạ từ A, ta có :* $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ ».

Như vậy, vấn đề là thiết lập các tam giác vuông, chứa một số trong các cạnh : OH, OA, OB, OC để huy động các kiến thức đã có ở trên trong tam giác vuông.

c) Nghiên cứu một vài trường hợp đặt biệt (thực hiện các phép thử, dự đoán)

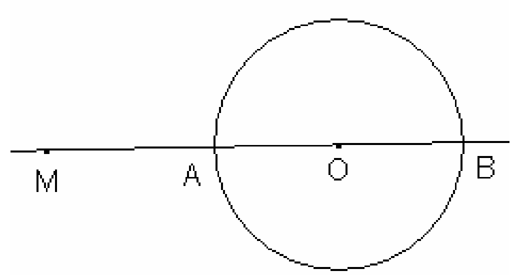
Một cái chung, đem đặc biệt hoá từng bộ phận khác nhau, theo các cách khác nhau sẽ cho nhiều cái riêng (trường hợp đặc biệt) khác nhau

Việc xem xét một số trường hợp đặc biệt có thể cho phép :

- dự đoán cách giải bài toán,
- hoặc dự đoán kết quả và từ đó thay đổi bản chất bài toán. Chẳng hạn, chuyển bài toán xác định thành bài toán chứng minh.

Ví dụ 1 : Cho đường tròn (O ; R) và điểm M cố định. Đường thẳng Δ thay đổi đi qua M và cắt đường tròn tại A và B. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$ với d = MO.

Để tìm ra cách giải bài toán này, ta thử giải bài toán trong một trường hợp đặc biệt, chẳng hạn khi Δ đi qua tâm O của đường tròn.



Giải :

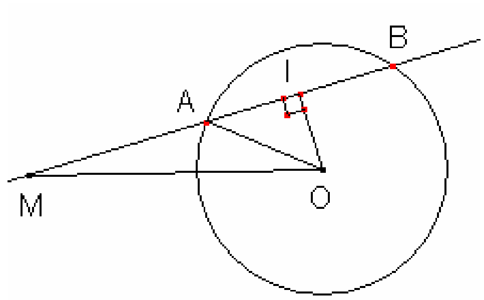
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$
$$= MO^2 - OA^2 = d^2 - R^2.$$

Nhận xét : Trong cách giải quyết trường hợp đặt biệt ở trên ta đã dùng kĩ thuật chèn vào điểm O để xuất hiện lượng không đổi MO, đồng thời có được $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.

Để giải quyết bài toán tổng quát đã cho, ta thử áp dụng kĩ thuật này, bằng cách chèn vào một điểm nào đó, chẳng hạn I sao cho $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Như vậy, điểm I cần chọn là trung điểm của AB.

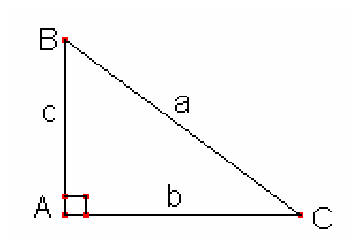
Từ đó ta có lời giải sau :



$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2$$
$$= \left(MO^2 - OI^2\right) - \left(OA^2 - OI^2\right) = d^2 - R^2.$$

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Để tìm lời giải bài toán này, ta giải bài toán trong một trường hợp đặc biệt, khi ABC là tam giác vuông tại A.



Giải : Vì Δ ABC vuông tại A nên ta có :

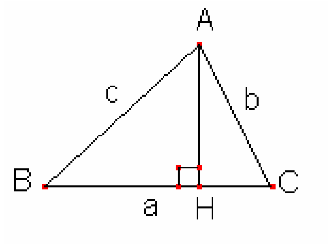
$$\begin{cases} \sin B = \dfrac{b}{a} \\ \sin C = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Nhận xét : Lời giải bài toán trong trường hợp đặc biệt dẫn tới ý tưởng giải bài toán tổng quát bằng cách tạo ra trong tam giác ABC các tam giác vuông có góc B và C.

Giải : • Kẻ đường cao AH.

– Trường hợp H nằm trong BC, ta có :

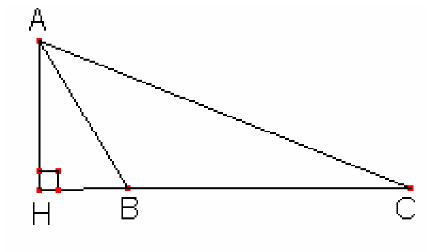
$$\begin{cases} \sin B = \dfrac{AH}{c} \\ \sin C = \dfrac{AH}{b} \end{cases} \Rightarrow c\sin B = b\sin C$$



$$\Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ (1).}$$

– Trường hợp H nằm ngoài BC, chẳng hạn như hình vẽ dưới đây.

Khi đó ta có :



$$\begin{cases} \sin B = \sin \widehat{ABH} = \dfrac{AH}{c} \\ \sin C = \dfrac{AH}{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c\sin B = b\sin C$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

– Trường hợp H trùng B hay C, ta cũng có hệ thức $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Như vậy, ta luôn có $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ (1).

• Tương tự, nếu kẻ đường cao BK ta sẽ có hệ thức $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ (2)

• Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Ví dụ 3 : Tìm tất cả các hàm số f(x) liên tục và thoả mãn f(x + y) = f(x) + f(y) với mọi số thực x và y.

Nghiên cứu một số trường hợp riêng của x và y :

– Với x = 0 và y = 1, ta có f(1) = f(0) + f(1).
  Do đó, f(0) = 0.

– Với x = 1 và y = -1, ta có f(0) = f(1) + f(-1).
  Từ đó suy ra, f(-1) = -f(1).

– Với x = y = 1, ta có f(2) = f(1) + f(1).
  Từ đó suy ra, f(2) = 2.f(1).

– Với x = 2 và y = 1, ta có f(3) = f(2) + f(1).
  Do đó, f(3) = 3.f(1).

Các kết quả đạt được cho phép dự đoán f(x) = f(1).x hay f(x) = ax.

Bây giờ, bài toán đã thay đổi bản chất. Đó không còn là bài toán tìm tòi, mà là bài toán chứng minh :

« Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) liên tục và thỏa mãn f(x + y) = f(x) + f(y) với mọi số thực x và y, thì f(x) = ax. »

d) Phân tích đi lên, đi xuống (thường dùng với các bài toán chứng minh)

(Tham khảo phần « Dạy học định lí »).

4.2.3. Lựa chọn phương hướng và thực hiện chương trình giải

Trong trường hợp có nhiều cách giải, ta có thể đề nghị học sinh tiến hành giải theo các phương pháp đã phát hiện, hoặc dự đoán và chọn giải theo cách nào có nhiều khả năng cho lời giải tối ưu.

Ví dụ : Giải phương trình $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2 + 2) = (1)$

Hướng 1 : Nhìn phương trình đã cho như phương trình thuộc dạng quen thuộc $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Phương pháp quen thuộc là khử căn.

Hướng 2 : Ta thấy, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, còn $2(x^2 + 2) = 2(x^2 - x + 1) + 2(x + 1)$

Như vậy có khả năng giải được bài toán bằng cách đặt 2 ẩn phụ :

$$u = \sqrt{x^2 - x + 1} \text{ và } v = \sqrt{x+1}$$

Nhưng, nếu theo hướng 1, khử căn bằng bình phương hai vế sẽ dẫn đến phương trình bậc 4, không trùng phương (không giải được nếu không đưa được về phương trình tích), trong khi hướng thứ hai vừa cho phép tránh được phương trình bậc cao, vừa khử được căn.

Lí giải này cho phép ưu tiên lựa chọn hướng thứ hai : Đk : $x \geq -1$. Khi đó : (1) $\Leftrightarrow 2u^2 + 2v^2 = 5uv \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$ (với $t = v/u$) $\Leftrightarrow t = 2$ hay $t = 1/2$, …

4.2.4. Soạn thảo lời giải

Trong quá trình tìm kiếm phương hướng giải, ta thường phải áp dụng các thao tác mò mẫm dự đoán. Do đó, có thể những ý tưởng, những thao tác chưa trọn vẹn, còn rườm rà phức tạp, thậm chí sai sót …, những suy luận còn dài dòng. Như vậy việc chỉnh sửa lại những ý tưởng, thao tác hay suy luận này là cần thiết. Không thể đưa nguyên xi những cái đã trải qua vào lời giải.

Hơn nữa, thực tế chỉ ra rằng : có nhiều học sinh đã hiểu rõ con đường giải bài toán (do chính họ, hay do người khác khám phá ra), nhưng lại không thể cho một soạn thảo đúng về lời giải. Nói cách khác, luôn có một khoảng cách giữa việc hiểu con đường dẫn tới câu trả lời và việc soạn thảo câu trả lời.

Vì vậy, ngoài việc rèn luyện cho học sinh kĩ năng tìm tòi lời giải bài toán, cần rèn luyện cho học cách trình bày một lời giải sao cho ngắn gọn, đầy đủ, chính xác và sáng sủa. Trong bước này cần chú ý sử dụng các kí hiệu, ngôn ngữ toán học một cách thích hợp và chính xác.

4.2.5. Kiểm tra, đánh giá kết quả và lời giải

Thông thường, học sinh không có thói quen kiểm tra, đánh giá kết quả đạt được cũng như nghiên cứu lại lời giải. Nếu có thì đại đa số vẫn chỉ nghĩ rằng bước cuối cùng này chỉ có tác dụng kiểm tra xem kết quả đạt được có chính xác không, lời giải có sai sót không. Thực ra, việc kiểm tra và đánh giá kết quả và lời giải có nhiều mục đích khác nhau, chẳng hạn :

– Kiểm tra tính chính xác của kết quả, cũng như lời giải (chú ý : nhiều khi lời giải sai nhưng lại cho kết quả đúng) : Kiểm tra xem tính toán có chính xác không, suy luận có hợp logic và chặt chẽ không, kết quả có thích đáng không (nghĩa là có thỏa mãn các điều kiện có trong đề bài hay điều kiện thực tế hay không), …

– Phát hiện cách giải khác đôi khi ngắn gọn hơn, hay hơn.

– Đánh giá về mặt phương pháp giải để lĩnh hội sâu sắc hơn về tri thức phương pháp.

– Nghiên cứu bài toán cho phép phát hiện các trường hợp đặc biệt, khái quát hoá hay mở rộng bài toán.

Ví dụ 1 (kiểm tra tính chính xác của kết quả và lời giải) :

Giải phương trình $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Lời giải của một học sinh :

"$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1 \Leftrightarrow 2x-1 + x - 1 + 3\sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{x-1} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{x-1} = 1 - x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 1$.

Đáp số : $x = 0$, $x = 1$ ".

Việc thử lại nghiệm cho thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Do đó, có thể kết luận lời giải là sai, vì nếu trong lời giải các phép biến đổi đều tương đương, thì kết quả tìm được phải đúng.

Như vậy vấn đề là kiểm tra lại các bước giải : các bước biến đổi có sai sót không ? các công thức được vận dụng có chính xác không ? suy luận có chặt chẽ không ? tính toán có nhầm lẫn không ? …

Ví dụ 2 (Phát hiện cách giải khác) :

Giải phương trình : $\log_{1/2}\log_2\log_2\log_2(\frac{-1}{x}) = 0$ (1)

* Cách giải mà nhiều học sinh thường áp dụng là :

Miền xác định :

$$\begin{cases} -1/x > 0 \\ \log_2(-1/x) > 0 \\ \log_2\log_2(-1/x) > 0 \\ \log_2\log_2\log_2(-1/x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1/x > 0 \\ -1/x > 1 \\ \log_2(-1/x) > 1 \\ \log_2\log_2(-1/x) > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1/x > 1 \\ -1/x > 2 \\ \log_2(-1/x) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1/x > 2 \\ -1/x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 0$$

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow \log_2\log_2\log_2(\frac{-1}{x}) = 1 \Leftrightarrow \log_2\log_2(\frac{-1}{x}) = 2$

$\Leftrightarrow \log_2(\frac{-1}{x}) = 4 \Leftrightarrow -1/x = 16 \Leftrightarrow x = -$ b $1/16$

* Nhận xét thứ nhất về lời giải trên :

– Quá dài dòng do bước tìm điều kiện (miền xác định của phương trình).

– Rất dễ sai khi tìm điều kiện này.

– Chỉ có một nghiệm duy nhất. Hơn nữa nghiệm này có thể đưa được về dạng luỹ thừa của 2. Như vậy, có thể thử lại nghiệm không quá khó khăn.

Những nhận xét này gợi nên cách giải bằng dùng các phép biến đổi hệ quả :

(1) $\Rightarrow \log_2\log_2\log_2(\frac{-1}{x}) = 1 \Rightarrow \log_2\log_2(\frac{-1}{x}) = 2$

$\Rightarrow \log_2(\frac{-1}{x}) = 4 \Rightarrow -1/x = 16$

$\Rightarrow x = -1/16$

Thử lại nghiệm, bằng cách thế $x = -1/16$ vào phương trình.

* Nhận xét 2 : Với $0 < a \neq 1$, ta luôn có $\log_a f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = a^{\alpha}$. Từ đó dẫn đến cách giải sau đây, mà không cần đặt điều kiệm ban đầu :

(1) $\Leftrightarrow \log_2\log_2\log_2(\frac{-1}{x}) = 1 \Leftrightarrow \log_2\log_2(\frac{-1}{x}) = 2$

$\Leftrightarrow \log_2(\frac{-1}{x}) = 4 \Leftrightarrow -1/x = 16$

$\Leftrightarrow x = -1/16$.

Ví dụ 3 (Hình thành tri thức phương pháp) :

Trong ví dụ giải phương trình $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2 + 2)$. Đánh giá cách giải thứ 2 (xem ví dụ trên), ta có thể nêu lên đặc trưng của phương pháp này nhằm hình thành ở học sinh một số tri thức phương pháp, mà ta không có dịp đưa vào trong giờ dạy chính thức như :

– Đôi khi, một phương trình có thể giải được bằng cách đặt hai ẩn phụ. Việc đặt hai ẩn phụ có thể cho phép đưa một phương trình bậc cao về một phương trình bậc thấp hơn hay hệ phương trình hai ẩn.

– Một phương trình đẳng cấp bậc hai đối với hai ẩn x, y có thể giải được nhờ vào ẩn phụ $t = \frac{x}{y}$ hay $t = \frac{y}{x}$ (có thể mở rộng cho phương trình đẳng cấp bậc n).

4.3. Lưu ý về mặt sư phạm

• Dù chúng ta có yêu cầu học sinh giải rất nhiều bài tập (chưa có, hay không có thuật toán giải, hay thuật toán cũ tỏ ra kém hiệu quả), thì điều này cũng không đủ. Việc học tập phương pháp tìm tòi lời giải các bài toán là rất cần thiết. Nói cách khác, cần hướng dẫn học

sinh học cách suy nghĩ, cách tìm tòi lời giải. Đây là cơ hội tốt để trang bị cho học sinh một số tri thức phương pháp, phát triển năng lực và phẩm chất tư duy.

Để làm được điều đó, nên :

– Rèn luyện thói quen giải một bài toán theo tiến trình đã phân tích ở trên.

– Trong mỗi bước, cần có thói quen đặt ra các câu hỏi, như hệ thống câu hỏi mà G. Polia đề nghị.

– Tập luyện một số thủ thuật tìm tòi lời giải như đã nêu ở trên.

– Giáo viên càng hạn chế được tác động của mình bao nhiêu thì càng tốt bấy nhiêu. Chỉ sử dụng những tác động có tính gợi ý trong một số trường hợp cần thiết (học sinh gặp khó khăn). Nên trình bày gợi ý dưới dạng vấn đáp tìm tòi (đàm thoại ơrixtic) : Giáo viên đề ra một hệ thống câu hỏi được sắp xếp hợp lí cả về thứ tự lẫn độ khó để qua đó học sinh từng bước phát hiện ra phương hướng giải.

• Không hạn chế việc giải bài tập chỉ nhằm vào chức năng củng cố và luyện tập. Cần tăng cường khai thác bài tập như là động cơ hay phương tiện hình thành kiến thức mới.

• Nên tăng cường khai thác các bài toán thực tiễn với vai trò và chức năng như đã làm rõ trong phần trên.

Câu hỏi và bài tập

1. Trình bày quan điểm riêng của Anh (Chị) về cách dùng các thuật ngữ « Bài toán » và « Bài tập ».

2. Cho một cách phân loại về khái niệm « bài toán », khác với các phân loại đã nêu trong giáo trình. Việc nghiên cứu nhiều kiểu phân loại như vậy có lợi ích gì cho việc dạy học của Anh (Chị) ?

3. Tham khảo sách giáo khoa toán thuộc một cấp học ở bậc THPT (lớp 10, lớp 11, hay lớp 12), từ đó hãy đánh giá về mục đích và mức độ khai thác các bài toán thực tiễn trong các sách giáo khoa này.

4. Trình bày một phương án sử dụng bài toán thực tiễn với chức năng làm động cơ đưa vào một kiến thức mới thuộc chương trình toán THPT.

5. Giải các phương trình và bất phương trình sau bằng nhiều cách khác nhau (nếu có thể) :

a) $\cos x + \cos 6x = 2$

b) $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$ (đề 51)

c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{x^2+2x-3} = 4-2x$

d) $\lg x = x^2$

e) $\log_7(x+2) = 6-x$

6. Giải bất phương trình $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x \geq 10$

7. Giải và biện luận phương trình :

$$\sqrt{x-\sqrt{3}} + \alpha^2 x^2 + 2\alpha x(\sqrt{6}-\sqrt{3}) = 6\sqrt{2}-9.$$

8. Giải và biện luận theo tham số a phương trình :

$$x^3 + (2 - a^2)\,a = \sqrt[3]{2x + (a^2 - 2)a}$$

9. Cho bài toán : Giải bất phương trình $\sqrt{x-6} \geq \sqrt{10-x} + 1$

Tìm sai lầm trong bài làm sau của một học sinh lớp 10 :

"Vì $\sqrt{10-x} + 1 > 0$, nên

$\sqrt{x-6} \geq \sqrt{10-x} + 1 \Leftrightarrow x - 6 \geq 11 - x + 2\sqrt{10-x}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{10-x} \leq 2x - 17 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 17 \geq 0 \\ 4(10-x) \leq 4x^2 - 68x + 289 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 17/2 \\ \forall x \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 17/2.$"

10. Chứng minh bằng nhiều cách khác nhau định lí cosin trong tam giác : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

11. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất là 2.

a) Giải bài toán bằng nhiều cách khác nhau.

b) Dự đoán các sai lầm mà học sinh có thể gặp phải khi giải bài toán trên.

c) Phân tích khả năng sử dụng bài toán này trong việc rèn luyện một số phẩm chất tư duy như : Tính linh hoạt, tính phê phán và tính sáng tạo.

12. Cho dãy (b_n) xác định bởi : $\begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2 - b_n} \quad \text{với } \forall n \geq 1 \end{cases}$

Tìm công thức tính số hạng tổng quát của dãy chỉ phụ thuộc tham số n.

13. Hãy xây dựng một hệ thống câu hỏi dẫn dắt học sinh giải các bài toán sau :

a) Chứng minh hệ thức : $\dfrac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$

b) Giải phương trình : $\sin 3x + \sin^3 x = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x$

c) Giải phương trình :

$$8^{x+1} + 8.(0,5)^{3x} + 3.2^{x+3} = 125 - 24.(0,5)^{x}$$

14. Cho bài toán : Với giá trị nào của m thì phương trình

$$x^2 - |x| + m = 0$$

có một nghiệm duy nhất.

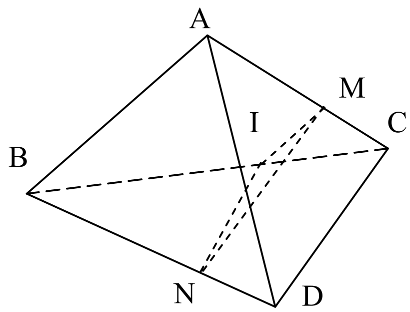
Đánh giá bài làm sau :

Nếu x là nghiệm thì –x cũng là nghiệm vì $(-x)^2 - |-x| + m = x^2 - |x| + m = 0$. Do đó, nếu phương trình có nghiệm duy nhất thì x = -x hay x = 0. Thay x = 0 vào phương trình ta được m = 0. Vậy, với m = 0 thì phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

15. Cho bài toán : Trong không gian, cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Hai điểm M, N lần lượt chia đoạn AC và BD theo cùng tỉ số k. Chứng minh rằng các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng

phẳng.

Đánh giá bài làm sau :



Gọi I là điểm chia đoạn thẳng BC theo tỉ số k. Xét tam giác ABC ta có :

$\frac{BI}{IC} = \frac{AM}{MC} = k \Rightarrow$ MI//AB (Theo định lí Talet)

$\Rightarrow$ AB//(MNI) (1)

Tương tự xét tam giác BDC, ta có

$$\frac{BN}{ND} = \frac{BI}{IC} = k \Rightarrow \text{NI//CD} \Rightarrow \text{CD//(MNI)}\ (2)$$

Mặt khác, MN $\subset$ (MNI) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ Các đường thẳng chứa các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ hoặc song song với cùng một mặt phẳng (MNI) hoặc thuộc mặt phẳng này $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

16. Xét một bài trong đề kiểm tra môn Phương pháp dạy học toán năm 2003 :

« Cho bài toán : Giải phương trình

$$\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5\ (1).$$

Anh (chị) hãy phân tích bài làm sau của một học sinh :

Pt (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2.2.\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 2 + \sqrt{x-1} - 3 = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10.$ »

Sau đây là bài làm của một số sinh viên :

Sinh viên 1 :

"Bài làm trên có hai sai lầm cơ bản.

Sai lầm 1 : Học sinh không nắm vững (khái niệm) định nghĩa phương trình tương đương, phương trình hệ quả.

Trước khi giải một bài toán cần phải có thói quen đặt điều kiện cho biểu thức dưới dấu căn sau đó mới được sử dụng dấu "$\Leftrightarrow$ "để giải phương trình. Còn nếu không đặt điều kiện thì giải theo phương pháp "phương trình hệ quả", sử dụng dấu "$\Rightarrow$ ".Tìm được nghiệm bắt buộc phải thử lại vào phương trình.

Em học sinh trên không đặt điều kiện cho biểu thức dưới dấu căn mà sử dụng dấu tương đương để giải phương trình"

Sinh viên 2 :

"- Bài làm trên sai ở bước biến đổi tương đương.

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=5$$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{x-1}$ + 2 + $\sqrt{x-1}$ - 3 = 5, vì …

Ngoài ra bước giải phương trình còn thiếu điều kiện $x\geq 1$ ".

Sinh viên 3 :

"Ở bước đầu em A đã xác định là sẽ biến đổi tương đương, thế thì lời giải của em thiếu điều kiện (Nếu biến đổi tương đương phải có điều kiện), …

Bước cuối cùng $\sqrt{x-1}$ = 3 $\Leftrightarrow$ x - 1 = 9 $\Leftrightarrow$ x = 10 không phải là phép biến đổi tương đương, đó là phép biến đổi hệ quả, nghĩa là $\sqrt{x-1}$ = 3 $\Rightarrow$ x - 1 = 9 $\Rightarrow$ x = 10 ".

Hãy phân tích câu trả lời của các sinh viên này.

17. Cho bài toán : Giải phương trình

$$\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=5 \ \ (1).$$

Phân tích bài làm sau của một số sinh viên năm thứ 3 ĐHSP :

Sinh viên 1 :

"(1) $\Rightarrow \sqrt{x-1+2.2.\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=5$

$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=5$

$\Rightarrow |\sqrt{x-1}+2| + |\sqrt{x-1}-3| = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}-3=5 \text{ nếu } \sqrt{\mathrm{x-1}}\geq 3\\ \sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=5 \text{ nếu } \sqrt{\mathrm{x-1}}<3\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}=3 \text{ nếu } \mathrm{x}\geq 10\\ 5=5 \text{ nếu } 1\leq \mathrm{x}<10\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\mathrm{x}=10 \text{ nếu } \mathrm{x}\geq 10\\ 5=5 \text{ nếu } 1\leq \mathrm{x}<10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{x}=10\\ 1\leq \mathrm{x}<10\end{cases}$$

Thử lại : x = 10 (1) thoả

1 <x <10, (1) $\Leftrightarrow$ 5 = 5 $\Rightarrow$ thoả.

Vậy tập nghiệm của (1) là T = [1,10] ".

Sinh viên 2 :

"(1) $\Rightarrow \sqrt{x-1+2.2.\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=5$

$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+2| + |\sqrt{x-1}-3| = 5$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=3\\ 5=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=3$$

$\Rightarrow$ x – 1 = 9 $\Rightarrow$ x = 10.

Thử lại nghiệm x = 10 vào phương trình (1) là thoả. Vậy (1) có nghiệm là x = 10."

18. Chứng minh hệ thức : $\dfrac{1}{\sin^2 a-\cos^2 a}=\dfrac{tg^2 a+1}{tg^2 a-1}$

19. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x :

$$3(\sin^8x - \cos^8x) + 4(\cos^6x - 2\sin^6x) + 6\sin^4x$$

20. Xét bài toán : Giải phương trình

$$\sin3x + \sin^3x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sin2x \ (1).$$

Đánh giá bài làm sau của một sinh viên ĐHSP :

"(1) $\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3x + \sin^3x = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin2x$

$\Leftrightarrow \sin^3x - \sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x = 0$ (2)

Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$.

(2) $\Leftrightarrow t^3 - t + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t.\sqrt{1-t^2} = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ (3) hay $t^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-t^2} - 1 = 0$ (4)

Giải (3) : $t = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

Giải (4) :

$$t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-t^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-t^2} = 1 - t^2$$

$$\Leftrightarrow 3(1-t^2) = 4(1-t^2)^2$$

$$\Leftrightarrow (1-t^2)[4(1-t^2) - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 1 \\ t^2 = 1/4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm 1 \\ t = \pm 1/2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \pm 1 \\ \sin x = \pm 1/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi/2 + k\pi \\ x = \pm\pi/6 + l2\pi \end{array}\right.$$

Kết luận, phương trình có nghiệm là : $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pi/2 + k\pi \\ x = \pm\pi/6 + l2\pi \end{array}\right.$."

21. Cho bài toán : Giải phương trình $\sin\left(\dfrac{3\pi}{5} + x\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{5} - \dfrac{x}{2}\right)$.

Phân tích khả năng sử dụng bài toán trên trong việc rèn luyện cho học sinh các thao tác nhận biết và huy động kiến thức khi giải các bài toán.

22. Yêu cầu tương tự bài 17 với các bài toán sau :

a) Tìm $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ với m, n nguyên dương

b) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(tgx)}$

23. Cho bài toán : Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}} \text{ n dấu căn.}$$

Phân tích bài làm sau của một học sinh :

"Nhận xét : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ (1). Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. Do $u_n > 0$ với mọi n, nên $a \geq 0$.

Từ (1) suy ra : $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+u_n} \Rightarrow a = \sqrt{2+a}$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}\right. .$$

Loại a = -1. Vậy : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$."

24. Giải phương trình : $\sin(\frac{3\pi}{5}+x) = 2\sin(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2})$

25. Giải phương trình : $(24+x)^{\frac{1}{3}} + (12-x)^{\frac{1}{2}} = 6$

26. Cho bài toán : Biết tg$\frac{x}{2}$ = m, hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{1-2\sin^2\frac{x}{2}}{1+\sin x}.$$

a) Giải bài toán trên bằng ba cách khác nhau.

b) Phân tích khả năng sử dụng bài toán này trong việc rèn luyện cho học sinh các thao tác tư duy : Phân tích, Tổng hợp, So sánh và các kĩ năng : Nhận biết, Huy động kiến thức, trong việc tìm tòi lời giải các bài toán.

c) Đề xuất một hệ thống câu hỏi dạng vấn đáp tìm tòi để học sinh có thể tìm ra lời giải bài toán trên.

Vấn đề cần lưu ý
về mối quan hệ giữa tiến trình dạy học
và phương pháp dạy học

Như đã làm rõ trong chương 1, nếu tiêu chí phân loại chỉ dựa vào vai trò của giáo viên, vai trò của học sinh và đặc trưng của tri thức cần truyền thụ, ta có một cách phân chia tổng thể các phương pháp dạy học theo ba nhóm : Phương pháp giáo điều, phương pháp truyền thống và phương pháp tích cực.

Tuy nhiên, cách thức dạy học một khái niệm, định lí, tri thức phương pháp hay giải toán không chỉ phụ thuộc vào vai trò và nhiệm vụ của giáo viên và học sinh mà còn phụ thuộc vào tiến trình dạy học và cách thức phối hợp hoạt động của giáo viên và học sinh trong mỗi bước của tiến trình.

Do đó, có thể nói phương pháp dạy học trong các trường hợp trên là cặp (Tiến trình, Giáo viên – Học sinh), trong đó thành phần Giáo viên – Học sinh mô tả vai trò, nhiệm vụ của giáo viên và học sinh, cũng như cách thức phối hợp hoạt động giữa giáo viên và học sinh hay giữa học sinh và học sinh. Cách thức phối hợp hoạt động giữa học sinh và học sinh có thể là : làm việc cá nhân, làm việc theo nhóm nhỏ, hay xen kẽ giữa hai hình thức này, …

Như vậy, khái niệm phương pháp dạy học được dùng ở đây không đồng nhất với các tiến trình dạy học, cũng không trùng với các phương pháp dạy học được dùng theo cách gọi truyền thống (như phương pháp thuyết trình, phương pháp đàm thoại, …) mà bao hàm cả hai thành phần này. Nói cách khác, không nên hiểu phương pháp dạy học theo nghĩa khá hẹp như cách gọi truyền thống.

Trong trường hợp dạy học đặt và giải quyết vấn đề, thông thường, khi soạn giáo án giáo viên thường ghi : "Dùng phương pháp dạy học đặt và giải quyết vấn đề". Cách ghi này chỉ mô tả được các bước cần thực hiện[25], nghĩa là tiến trình dạy học, mà không làm rõ đặc trưng về cách thức hoạt động của giáo viên và học sinh. Phù hợp với quan niệm về phương pháp dạy học nêu trên, ta nên trình bày cụ thể hơn. Chẳng hạn như : "Dùng phương pháp dạy học đặt và giải quyết vấn đề theo hình thức thuyết trình", "Phương pháp dạy học đặt và giải quyết vấn đề theo hình thức vấn đáp gợi mở", hay "Phương pháp dạy học đặt và giải quyết vấn đề theo hình thức kết hợp tự nghiên cứu và vấn đáp gợi mở", …

Chúng tôi đưa ra phân biệt trên không nhằm mục đích loại bỏ cách gọi truyền thống về khái niệm phương pháp dạy học, mà chỉ lưu ý rằng trong nhiều tình huống cụ thể cần thiết phải làm rõ hơn đặc trưng của phương pháp dạy học mà ta vận dụng.

Ví dụ. Xét tiến trình Bài toán → Định lí trong dạy học định lí toán học :

Bước 1: Giải các bài toán.

---

[25] Xem lại trong chương 1.

Bước 2: Phát biểu định lí như là kết quả của việc giải quyết các bài toán (thể chế hoá).

Bước 3 : Củng cố và vận dụng định lí.

Bảng dưới đây tóm tắt một vài phương pháp dạy học định lí có thể tính đến ứng với tiến trình trên.

Trách nhiệm GV và HS	Bước 1	Bước 2	Bước 3	PPDH (theo cách gọi truyền thống)	Mức độ tích cực của HS
PPDH.1	GV	GV	GV	Thuyết trình	Thụ động
PPDH.2	GV+HS	GV+HS	GV+HS	Vấn đáp gợi mở	Độ tích cực thấp
PPDH.3	HS	GV+HS	HS	Vấn đáp gợi mở + Tự nghiên cứu.	Tích cực
PPDH.4	HS	HS	HS	Tự nghiên cứu, thảo luận nhóm, …	Độ tích cực cao

PPDH.2 chỉ phương pháp dạy học một định lí theo đó tiến trình dạy học được vận dụng là tiến trình Bài toán → Định lí và trong tất cả các bước của tiến trình này học sinh tiến hành giải quyết nhiệm vụ tương ứng nhờ vào hệ thống câu hỏi gợi mở của giáo viên.

PPDH.3 chỉ phương pháp dạy học một định lí theo đó,

• tiến trình dạy học được lựa chọn là: Bài toán→ Định lí,

• cách thức hoạt động của giáo viên và học sinh được mô tả như sau :

– Trong bước 1 của tiến trình, học sinh độc lập tìm lời giải bài toán.

– Ở bước 2 của tiến trình : Giáo viên đưa ra một hệ thống câu hỏi gợi mở để giúp học sinh rút ra những kết quả quan trọng từ lời giải các bài toán đã cho (kiến thức cần giảng dạy), từ đó, giáo viên thể chế hoá kiến thức này thông qua việc trình bày định lí.

– Bước 3 : Học sinh độc lập giải các bài toán vận dụng và củng cố định lí.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. A. RIEUNIER (2001), *Préparer un cours*, Edition ESF, Paris.
2. C. ROGERS (2001), *Phương pháp dạy và học hiệu quả*, Bản dịch tiếng Việt của Cao Đình Quát, NXB Trẻ.
3. I. Ia. LECNE (1981). *Cơ sở lí luận của các phương pháp dạy học*, Bản dịch tiếng Việt, NXB Sư Phạm.
4. I. Ia. LECNE (1997), *Dạy học nêu vấn đề*, Phạm Tất Đắc dịch, NXB Giáo dục.
5. D.GRENIER (1985), *Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour des élèves de classes de 4ème et 3ème*, Petit X n⁰ 7, IREM de Grenoble.
6. ĐINH QUANG MINH (2003), *Tăng cường khai thác ứng dụng của một số chủ đề toán học trong Đại số 10 vào việc giải các bài toán mang nội dung thực tiễn*, Tạp chí Thông tin Khoa học Giáo dục số 95.
7. G. POLYA (1965), *Comment poser et résoudre un problème*, Paris, Dunod.
8. G. POLYA (1975), *Sáng tạo toán học, tập 1, 2, 3*, Tài liệu bồi dưỡng giáo viên, Bản dịch tiếng Việt của Phan Tất Đắc, Nguyễn Giản, Hồ Thuần, NXB Giáo dục.
9. G. POLYA (1975), *Giải một bài toán như thế nào?*, Bản dịch tiếng Việt của Hồ Thuần, Bùi Tường, NXB Giáo dục.
10. G. ARSAC, … M. MANTE (1995), *Nhập môn về lập luận diễn dịch ở trường trung học cơ sở*, Bản dịch tiếng Việt của Đoàn Hữu Hải, Lê Đình Phi và Nguyễn Thành Tâm, NXB Giáo dục.
11. J. BAIR, G.HAESBROECK, … (2000), *Formation mathématique par la résolution de problèmes*, Edition de Boeck Université, Bruxelles.
12. HOÀNG CHÚNG (1995), *Phương pháp dạy học toán học ở trường phổ thông trung học cơ sở*, NXB Giáo dục.
13. HOÀNG XUÂN SÍNH, NGUYỄN MẠNH TRINH (1998), *Tập hợp và logic*, NXB Giáo dục.
14. LÊ NGUYÊN LONG (1998), *Thử đi tìm những phương pháp dạy học hiệu quả*, NXB Giáo dục.
15. LÊ TỬ THÀNH (1995), *Tìm hiểu lôgic học*, NXB Trẻ.
16. LÊ VĂN TIẾN, LÊ THỊ HOÀI CHÂU, NGUYỄN VĂN VĨNH (1999), *Học tập trong hoạt động và bằng hoạt động*, Tài liệu bồi dưỡng thường xuyên giáo viên phổ thông trung học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.
17. LÊ VĂN TIẾN (2000), *Các quan điểm khác nhau về giảng dạy Giải tích ở trường phổ thông,* Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục số chuyên đề quý 1/2000 và số 3/2000.

18. LÊ VĂN TIẾN (2001), *Etude didactique de liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viet-Nam*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble, France.

19. LÊ VĂN TIẾN (2002), *Quan điểm thực nghiệm trong dạy học toán ở trường phổ thông.* Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, tập 30 số 2.

20. LÊ VĂN TIẾN (2002), *Chương trình và sách giáo khoa Toán đang thí điểm hiện nay ở trường THCS, nhìn từ quan điểm thực nghiệm trong Toán học*, Kỉ yếu hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 6, tổ chức tại Huế.

21. LÊ VĂN TIẾN (2003), *Cách nhìn mới về tiến trình dạy học khái niệm toán học*, Tạp chí Giáo dục, số 64.

22. LÊ VĂN TIẾN, TRẦN THỊ TUYẾT DUNG (2004), *Một phần thực trạng về học tập suy luận, chứng minh của học sinh THCS*, Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.

23. LÊ VĂN TIẾN (2004), Có nên vận dụng « Quan điểm thực nghiệm » vào dạy học Toán ?*, Tạp chí Thông tin Khoa học Giáo dục, số 107.*

24. LÊ VĂN TIẾN, ĐOÀN HỮU HẢI (2004), Chứng minh ở trường phổ thông : Nghiên cứu lịch sử, khoa học luận, didactic và điều tra thực trạng dạy học về chứng minh ở trường phổ thông Việt Nam hiện nay*, Đề tài nghiên cứu khoa học cấp Bộ, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.*

25. LÊ VĂN TIẾN (đồng tác giả, 2004), *Đại số và Giải tích 11*, Sách giáo khoa thí điểm, Ban khoa học tự nhiên, Ban khoa học xã hội, NXB Giáo dục.

26. LÊ VĂN TIẾN (đồng tác giả, 2004), *Bài tập Đại số và Giải tích 11*, Sách giáo khoa thí điểm, Ban khoa học tự nhiên, NXB Giáo dục.

27. LÊ VĂN TIẾN (đồng tác giả, 2004), *Đại số và Giải tích 11*, Sách giáo viên, Ban khoa học tự nhiên, Ban khoa học xã hội, NXB Giáo dục.

28. L. F. KHARLAMÔP (1976), *Phát huy tính tích cực học tập của học sinh như thế nào*, Bản dịch tiếng Việt của Đỗ Thị Trang và Nguyễn Ngọc Quang, NXB Giáo dục.

29. N. BALACHEFF (1982), *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*, RDM. Vol 3, $n^0$3.

30. N. BALACHEFF (1988), *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège*, Thèse d'Etat. Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

31. NGUYỄN BÁ KIM, VƯƠNG DƯƠNG MINH, NGUYỄN SĨ ĐỨC (1998), *Tính giải quyết vấn đề trong toàn bộ quá trình dạy học,* Tạp chí Thông tin Khoa học Giáo dục, số 66.

32. NGUYỄN BÁ KIM (1991), *Chính xác hoá một số khái niệm về dạy học giải quyết vấn đề*, Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục, số 10.

33. NGUYỄN BÁ KIM (2004), *Phương pháp dạy học môn toán*, NXB ĐHSP.

34. NGUYỄN CẢNH TOÀN (1997), *Phương pháp luận duy vật biện chứng với việc học, dạy, nghiên cứu toán học, tập 1, 2*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

35. NGUYỄN HẢI THẬP (2000), *Phương pháp dạy học nêu vấn đề ở bậc đại học*, Tạp chí Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, số 3.

36. NGUYỄN KÌ (1995), *Phương pháp Giáo dục tích cực, lấy người học làm trung tâm*, NXB Giáo dục.

37. NGUYỄN KÌ (1996), *Mô hình dạy học lấy người học làm trung tâm*, Trường Cán bộ Quản lí Giáo dục và Đào tạo Hà Nội.

38. NGUYỄN KẾ HÀO (1994), *Dạy học lấy học sinh làm trung tâm*, Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục, số 6.

39. NGUYỄN KHẮC VIỆN (2001), *Từ điển tâm lí*, NXB Văn hóa Thông tin.

40. NGUYỄN HỮU CHÂU (1995), *Dạy giải quyết vấn đề trong môn toán*, Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục, số 9.

41. NGUYỄN LAN PHƯƠNG (2000), *Cải tiến phương pháp dạy học toán với yêu cầu tích cực hoá hoạt động học tập theo hướng giúp học sinh phát hiện và giải quyết vấn đề*. Luận án Tiến sĩ Giáo dục, Viện Khoa học Giáo dục.

42. NGUYỄN VĂN BÀNG (1997), *Lại bàn về bài toán mở*, Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục, số 1.

43. NGUYỄN VĂN LỘC (1996), *Rèn luyện kỉ năng lập luận có căn cứ cho học sinh tring học cơ sở thông qua dạy hình học*, NXB Giáo dục.

44. PHẠM GIA ĐỨC (1995), *Đổi mới phương pháp dạy học toán ở trường THCS*, Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục, số 7.

45. PHẠM GIA ĐỨC, NGUYỄN MẠNH CẢNG, BÙI HUY NGỌC, VŨ DƯƠNG THUỴ (1998), *Phương pháp dạy học môn toán, tập I*, NXB Giáo dục.

46. PHẠM VĂN ĐỒNG (1995), *Phương pháp dạy học phát huy tính tích cực – Một phương pháp vô cùng quý báu*, Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục, số 12.

47. PHẠM VĂN HOÀN, NGUYỄN GIA CỐC, TRẦN THÚC TRÌNH (1981), *Giáo dục học môn toán*, NXB Giáo dục.

48. PHẠM MINH HẠC (chủ biên, 1996), *Tuyển tập tâm lý học J.Piaget*, NXB Giáo dục.

49. PHẠM VIẾT VƯỢNG (1995), *Bàn về "phương pháp Giáo dục tích cực",* Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục, số 10.

50. TÔN THÂN (1995), *Bài tập ''mở'', một dạng bài tập góp phần bồi dưỡng tư duy sáng tạo cho học sinh*, Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục, số 4.

51. TRẦN BÁ HOÀNH (2004), *Dạy và học bằng các hoạt động khám phá có hướng dẫn*, Tạp chí Thông tin Khoa học Giáo dục, số 102.

52. TRẦN BÁ HOÀNH, NHUYỄN ĐÌNH KHUÊ, ĐÀO NHƯ TRANG (2004), *Áp dụng dạy và học tích cực trong môn toán*, NXB Đại học Sư phạm Hà Nội.

53. TRẦN LUẬN (1999), *Một hướng nghiên cứu triển khai dạy học nêu vấn đề vào thực tiễn*, Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục, số 4.

54. TRẦN NAM LƯƠNG, LÊ ĐÌNH PHI (1997), *Tâm lí học và Giáo dục học – J.Piaget*, NXB Giáo dục.

55. TRẦN THỊ NGỌC DIỆP (2005), *Dạy học định lí theo định hướng tích cực hoá hoạt động của học sinh và tăng cường ứng dụng công nghệ thông tin*, Khoá văn tốt nghiệp, Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.

56. TRẦN THÚC TRÌNH (1992), *Nhìn lại lịch sử cải cách nội dung và phương pháp dạy học toán ở trường phổ thông trên thế giới trong thế kỉ XX*, Tạp chí Thông tin Khoa học Giáo dục, số 34.

57. TRẦN THÚC TRÌNH (2003), *Rèn luyện tư duy trong dạy học toán*, Đề cương môn học dành cho học viên Cao học, Viện Khoa học Giáo dục.

58. TRẦN THÚC TRÌNH (2004), *Phương pháp khám phá trong nghiên cứu khoa học và trong dạy học*, Tạp chí Thông tin Khoa học Giáo dục, số 111.

59. Y. CHEVALLARD (1985), *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné*, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, France.

60. Y. CHEVALLARD (1991 - 1992), *Le caractère expérimental de l'activité mathématique*, Petit X n^{0}30.

61. V. OKON (1976), *Những cơ sở của việc dạy học nêu vấn đề*, Bản dịch tiếng Việt của Phạm Hoàng Gia, NXB Giáo dục.

62. Histoire d'algorithmes, Edition Belin, 1994.

63. Từ điển : Petit Robert. Edition DicoRobert, Canada, 1993.

64. Từ điển : Le Petit Larousse, Edition Larousse – Bordas, 1999.

65. Từ điển toán học, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1993, Bản dịch tiếng Việt của Hoàng Hữu Như và Lê Đình Thịnh.

Sách giáo khoa :

66. Đại số 10, NXB Giáo dục 1990, Trần Văn Hạo chủ biên.

67. Hình học 11, NXB Giáo dục 1991, Trần Văn Hạo chủ biên.

68. Đại số và Giải tích 11, NXB Giáo dục 1996, Trần Văn Hạo chủ biên.

69. Đại số 10, Hình học 10, Hình học 11, Hình học 12, NXB Giáo dục 2001.

70. Hình học 8, NXB Giáo dục 1999.

71. Hình học 7, NXB Giáo dục 1987.

72. Hình học 7, NXB Giáo dục 1995.

73. Toán 7, NXB Giáo dục 2002.

74. Chương trình THCS môn toán, NXB Giáo dục 2002.

75. Sách giáo viên Toán 7, NXB Giáo dục 2003.